# 離散数学 第 7 回
# 集合と論理 (4)：直積と冪集合


岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学


2016 年 12 月 5 日

最終更新：2016 年 12 月 2 日　16:39



## スケジュール 前半 (予定)

1. 集合と論理 (1)：命題論理 (10 月 3 日)
- ∗ 体育の日 (10 月 10 日)
2. 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (10 月 17 日)
3. 集合と論理 (3)：述語論理 (10 月 24 日)
4. 証明法 (1)：∃ と ∀ を含む命題の証明 (10 月 31 日)
- ∗ 休講 (11 月 7 日)
5. 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (11 月 14 日)
6. 証明法 (3)：集合に関する証明 (11 月 21 日)
- ∗ 調布祭片付け (11 月 28 日)
7. 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (12 月 5 日)
- 中間試験 (12 月 12 日)

注意：予定の変更もありうる



## スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (12 月 19 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (1 月 16 日)
10. 関係 (1)：関係 (1 月 23 日)
11. 関係 (2)：同値関係 (1 月 30 日)
12. 関係 (3)：順序関係 (2 月 6 日)
13. 証明法 (4)：数学的帰納法 (2 月 13 日)
14. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (授業等調整日)
- 期末試験 (2 月 20 日？)

注意：予定の変更もありうる



## 今日の概要

**今日の目標**
- 有限集合の要素数が計算できる
- 集合の直積と冪集合を理解し，正しく答えられる
- 集合の直積と冪集合に関する包含関係，等式を証明できる





## 目次







## 有限集合の要素数

**要素数とは？**
有限集合 $A$ の要素数とは，その集合の要素の数である
- 記法：$|A|$，$\#A$，$\#(A)$

例：
- $|\{a, c, t\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$

注意：
- 要素数は数なので，有限集合に対してのみ要素数が定義される
- 要素数のことを「大きさ」,「サイズ」と呼ぶことがある
- $|A|$ は,「$A$ の絶対値」ではない





## 目次

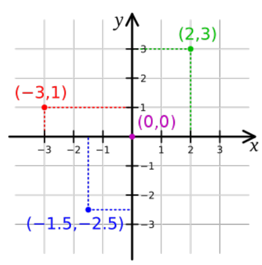


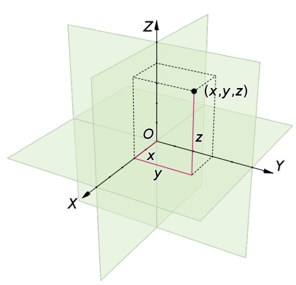




## 座標

- 2 次元平面の点の座標は 2 つの実数を「対」にして表現する
- このように，集合の要素を $\boxed{\text{対}}$ にすることは有用




http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

## 構造体

### プログラムにおける構造体

```
struct account {
  string name;
  int account_number;
  int balance;
};
```

数個のデータを $\boxed{組}$ にして，一つの構造を表現する

### 今から行うこと

数学において「対」や「組」を表現する方法を理解する





## 順序対 (2 個組)

### 順序対とは？ (常識に基づく定義)

順序対とは，ものを 2 つ並べたもののことである．

- $a$ と $a'$ をこの順で並べたものは「$(a, a')$」と表記する

「順序対」は単に「対」や「組」と呼ばれることもある

### 同じ順序対 (常識に基づく定義)

2 つの順序対 $(a, a')$ と $(b, b')$ が等しいことを $(a, a') = (b, b')$ と表記し，

$$a = b \text{ かつ } a' = b'$$

であることと定義する

注意：$(a, a')$ と $(a', a)$ は $a \neq a'$ ならば異なる





## 集合の直積 (1)

### 集合の直積

集合 $A$ と集合 $B$ の直積を $A \times B$ と表記して，

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

と定義する

「直積」は「デカルト積」とも呼ばれる

### 例

$A = \{a, b\}$，$B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$

簡単な確認：有限集合 $A, B$ に対して，$|A \times B| = |A| \times |B|$



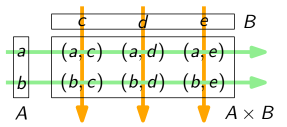


## 集合の直積：図示

### 例

$A = \{a, b\}$，$B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}$$




### 例 続き

$A = \{a, b\}$，$B = \{c, d, e\}$ のとき，

$$B \times A = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b), (e, a), (e, b)\}$$





## $n$ 個組

$n$ は自然数

### $n$ 個組とは？ (常識に基づく定義)

$n$ 個組とは，ものを $n$ 個並べたもののことである．

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ をこの順で並べたものは「$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$」と表記する

### 同じ $n$ 個組 (常識に基づく定義)

2 つの $n$ 個組 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ と $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ が等しいことを $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ と表記し，

$$\text{すべての } i \text{ に対して } a_i = b_i$$

であることと定義する





## 集合の直積 (2)

### 集合の直積

集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の直積を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と表記して，

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{すべての } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \\ \text{に対して } x_i \in A_i \end{array} \right\}$$

と定義する

「$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$」を「$\prod_{i=1}^{n} A_i$」と書くこともある

### 例

$A = \{a, b\}$，$B = \{c, d, e\}$，$C = \{f, g\}$ のとき，

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(a, c, f), (a, c, g), (a, d, f), (a, d, g), (a, e, f), (a, e, g), \\ &(b, c, f), (b, c, g), (b, d, f), (b, d, g), (b, e, f), (b, e, g)\} \end{aligned}$$

簡単な確認：有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して，

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \cdots \times |A_n|$$





## 集合の直積 (関係する記法)

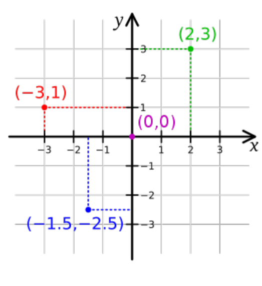
- $A \times A$ を $A^2$ と書く
- $A \times A \times A$ を $A^3$ と書く
- $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ 個}}$ を $A^n$ と書く

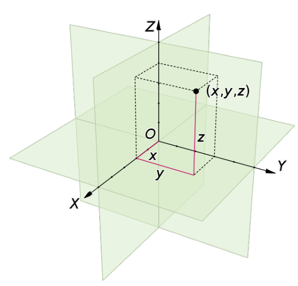




## 集合の直積：例 1 (デカルト座標系)

- $\mathbb{R}^2$ = 2 次元平面
- $\mathbb{R}^3$ = 3 次元空間
- …




http://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_coordinate_system

## 集合の直積：例 2 (IP アドレス)

(IPv4 における) IP アドレスは 1 バイトの数 4 つで表現される

- www.uec.ac.jp: 130.153.9.10
- www.kantei.go.jp: 202.32.211.139

つまり，

- 可能な IP アドレス全体の集合 $= \{0, \ldots, 255\}^4$
- 可能な IP アドレスの総数 $= |\{0, \ldots, 255\}^4| = 256^4 = 4294967296$ (約 43 億)

$\rightsquigarrow$ IP アドレス枯渇問題





## 集合の直積：例 3 (DNA (デオキシリボ核酸))

DNA は生物の遺伝情報を担う物質

- アデニン (A)，チミン (T)，シトシン (C)，グアニン (G) という塩基の並び方で遺伝情報はだいたい決められている

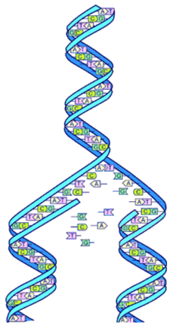
つまり，

- DNA が持つ遺伝情報全体の集合 $= \{A, T, C, G\}^n$

$n$ は生物種などによって異なる自然数

- 大腸菌：$n \approx 4.6 \times 10^6$
- ヒト：$n \approx 3.2 \times 10^9$

http://en.wikipedia.org/wiki/Genome



http://en.wikipedia.org/wiki/DNA_replication





## 集合の直積：補足

$A = \{1, 2\}, B = \{3\}, C = \{4, 5\}$ のとき

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(1,3), (2,3)\}, \\
B \times C &= \{(3,4), (3,5)\}, \\
A \times B \times C &= \{(1,3,4), (1,3,5), (2,3,4), (2,3,5)\}, \\
(A \times B) \times C &= \{((1,3),4), ((1,3),5), ((2,3),4), ((2,3),5)\}, \\
A \times (B \times C) &= \{(1,(3,4)), (1,(3,5)), (2,(3,4)), (2,(3,5))\}
\end{aligned}$$

特に，$A \times B \times C$ と $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ はすべて異なる





## 目次







## 冪集合

**冪集合**

集合 $A$ の冪集合とは $A$ の部分集合全体から成る集合であり，$2^A$ と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

**例**

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

簡単な確認：有限集合 $A$ に対して，$|2^A| = 2^{|A|}$

- 「冪集合」の他に「巾集合」,「べき集合」,「ベキ集合」とも書く
- 「$2^A$」の他に「$\mathcal{P}(A)$」,「$\mathscr{P}(A)$」とも書く
- 冪集合の要素は集合 (冪集合は集合の集合)





## 冪集合：例とイメージ

**例**

$A = \{a, b, c\}$ のとき

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

イメージ (箱による)

$\underbrace{\lfloor a\ b\ c \rfloor}_{A}$ $\underbrace{\lfloor\ \rfloor \lfloor a \rfloor \lfloor b \rfloor \lfloor c \rfloor \lfloor a\ b \rfloor \lfloor a\ c \rfloor \lfloor b\ c \rfloor \lfloor a\ b\ c \rfloor}_{2^A}$





## 冪集合：他の例

**冪集合 (再掲)**

集合 $A$ の冪集合とは $A$ の部分集合全体から成る集合であり，$2^A$ と表記する．

$$2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$$

- $2^{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$
- $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
- $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

**冪集合の定義より**

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$





## 目次

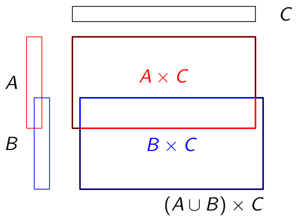
## 直積に関する等式：例題

**例題：次を証明せよ**

任意の集合 $A, B, C$ に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

図による直感








## 直積に関する等式：例題

**例題：次を証明せよ**

任意の集合 $A, B, C$ に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

**格言 (再掲)**

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

証明すべきことは

$$(x, y) \in (A \cup B) \times C \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$$

同値変形によって証明する





## 直積に関する等式：例題 — 証明

証明：任意の集合 $A, B, C$ を考える

$(x, y) \in (A \cup B) \times C$

$\Leftrightarrow$ $(x \in A \cup B) \land (y \in C)$　(直積の定義)

$\Leftrightarrow$ $((x \in A) \lor (x \in B)) \land (y \in C)$　(合併の定義)

$\Leftrightarrow$ $((x \in A) \land (y \in C)) \lor ((x \in B) \land (y \in C))$　(分配法則)

$\Leftrightarrow$ $((x, y) \in A \times C) \lor ((x, y) \in B \times C)$　(直積の定義)

$\Leftrightarrow$ $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$　(合併の定義)

したがって，$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ が成り立つ．　□





## 冪集合に関する証明：例題

**次の命題は正しいか，正しくないか**

任意の集合 $A, B$ に対して

$$A \subseteq B \quad \text{ならば,} \quad 2^A \subseteq 2^B$$

が成り立つ．

例：$A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ のとき

- $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
- $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

この例においては正しい





## 冪集合に関する証明：例題 (解答例)

解答例：正しい．理由は以下の通りである．

1. 任意の集合 $A, B$ を考え，$A \subseteq B$ であると仮定する
2. $X \in 2^A$ であると仮定する
3. (2) と冪集合の定義より，$X \subseteq A$ が成り立つ
4. (1) と (3) より，$X \subseteq B$ が成り立つ
5. (4) と冪集合の定義より，$X \in 2^B$ が成り立つ
6. したがって，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ　□

**冪集合の定義**

$$X \in 2^A \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq A$$





## 目次







## 今日の概要

**今日の目標**

- 有限集合の要素数が計算できる
- 集合の直積と冪集合を理解し，正しく答えられる
- 集合の直積と冪集合に関する包含関係，等式を証明できる