離散数学 第 6 回
証明法 (3)：集合に関する証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 11 月 21 日

最終更新：2016 年 11 月 18 日　14:15

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

中間試験

- 日時：12 月 12 日 (月) 1 限
- 教室：西 8 号館 131 教室 (いつもの教室ではないので注意)
- 出題範囲：第 1 回講義の最初から第 6 回講義の最後まで
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題は講義の演習問題として提示されたものと同一
    - ただし，発展問題は出題しない
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 10 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

今日の概要

今日の目標
- 論理を用いて，部分集合を定義し，それを理解する
- 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- 推論の類型として，4 つの推論規則が使えるようになる
  - モードゥス・ポネンス
  - モードゥス・トレンス
  - 仮言三段論法
  - 選言三段論法

(注：この 4 つの推論規則の名称は重要ではない)

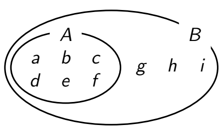
目次

部分集合：直感

次の 2 つの集合を考える
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



部分集合とは？ (直感)
集合 A が集合 B の部分集合であるとは，
A が B に含まれている (包含されている) こと

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)
A が B の部分集合であるとは，
$x \in A$　ならば　$x \in B$

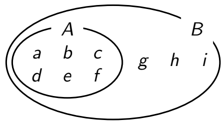
記号で書けば，$x \in A \rightarrow x \in B$

部分集合の記法
A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する
(「$A \subset B$」や「$A \subsetneq B$」と表記することもある)

次の 2 つの集合を考える
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



同じ集合

$A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$x \in A \quad \leftrightarrow \quad x \in B$$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が真となること (成り立つこと) と同じ

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B && (= \text{の定義}) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A) && (\text{実質同値}) \\ &\Leftrightarrow (A \subseteq B) \land (B \subseteq A) && (\text{部分集合の定義}) \end{aligned}$$

同じ集合：まとめ

$A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$x \in A \quad \leftrightarrow \quad x \in B$$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が真となること (成り立つこと) と同じ

つまり，

集合が同じであることの言い換え

集合 A, B に対して

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

部分集合：重要な性質

空集合はすべての集合の部分集合である

任意の集合 A に対して，

$$\emptyset \subseteq A$$

証明：$x \in \emptyset \to x \in A$ が恒真式であることを示す

- F $\to x \in A$ は恒真式である
- $x \in \emptyset \Leftrightarrow$ F である
- したがって，$x \in \emptyset \to x \in A$ も恒真式である □

目次

推論と証明法

「〜ならば…である」という命題の証明法 (再掲)

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

今後出てくる証明にあること

- 証明で 用いる性質 が複雑になってくる
  - 用いる性質どうしを組み合わせて，使える性質を導く (推論)
  - 用いる性質：仮定，または，仮定の下で正しいと分かっていること
- 証明で 示したい事項 が複雑になってくる
  - 示したいことを変更して，証明をしやすくする

推論とは？

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，

用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

- 解釈：P が正しいとき，Q も正しいので，そのような置換が可能
- 実は今までも無意識に用いている

第 4 回講義資料より：例題

例題：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- 左辺 $-$ 右辺 $= x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$. ←ここ
- したがって，$x^2 + 1 \geq 2x$ である． □

用いている推論

a が実数である $\Rightarrow a^2 \geq 0$

推論の類型

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，

用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある $\rightsquigarrow$ それをまず紹介

- モードゥス・ポネンス
- モードゥス・トレンス
- 仮言三段論法
- 選言三段論法

モードゥス・ポネンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

つまり，
- P が使える性質
- $P \to Q$ が使える性質

であるとき，Q を新たに使える性質として導ける

モードゥス・トレンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・トレンス (モーダス・トレンス)

$$(P \to Q) \land \neg Q \quad \Rightarrow \quad \neg P$$

つまり，
- $P \to Q$ が使える性質
- $\neg Q$ が使える性質

であるとき，$\neg P$ を新たに使える性質として導ける

仮言三段論法

任意の命題変数 P, Q, R に対して，次が成り立つ

仮言三段論法 (三段論法)

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \quad \Rightarrow \quad P \to R$$

つまり，
- $P \to Q$ が使える性質
- $Q \to R$ が使える性質

であるとき，$P \to R$ を新たに使える性質として導ける

選言三段論法

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

選言三段論法

$$(P \lor Q) \land \neg P \quad \Rightarrow \quad Q$$

つまり，
- $P \lor Q$ が使える性質
- $\neg P$ が使える性質

であるとき，Q を新たに使える性質として導ける

推論の類型 (再掲)

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある ⇝ それをまず紹介
- モードゥス・ポネンス
- モードゥス・トレンス
- 仮言三段論法
- 選言三段論法

これらを用いて証明を行っていく

目次

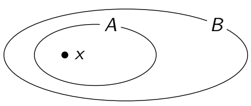
例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば，} \quad x \in B$$

オイラー図による直感



注意：「ならば」の前の部分 (仮定) を満たすように図を描く

「〜ならば⋯である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め，「したがって，⋯である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて，「⋯である」を証明する

例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば，} \quad x \in B$$

証明：任意の集合 A, B と任意の x を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$x \in A$ であると仮定する
3. (1) と部分集合の定義より，「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つ．
4. (2) と (3) より，$x \in B$ が成り立つ．
5. したがって，$x \in B$ である

したがって，任意の集合 A, B と任意の x に対して，$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，$x \in B$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

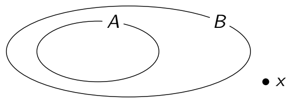
例題 2

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \notin B \text{ ならば，} \quad x \notin A$$

オイラー図による直感



証明は演習問題 (ヒント：モードゥス・トレンスを用いる)

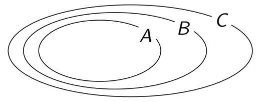
例題 3

次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば，} \quad A \subseteq C$$

オイラー図による直感



格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 3

証明：任意の集合 A, B, C を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$B \subseteq C$ であると仮定する
3. $x \in A$ であると仮定する

7. したがって，　　　　　　　　　$x \in C$ が成り立つ
8. したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，任意の集合 A, B, C に対して，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

証明したいことは,「$x \in A$ ならば $x \in C$」

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \to (x \in B)$$

例題 3

証明：任意の集合 A, B, C を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$B \subseteq C$ であると仮定する
3. $x \in A$ であると仮定する
4. (1) と部分集合の定義より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である
5. (2) と部分集合の定義より，$x \in B$ ならば $x \in C$ である
6. (4) と (5) より，$x \in A$ ならば $x \in C$ となる
7. したがって，(3) と (6) より，$x \in C$ が成り立つ
8. したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，任意の集合 A, B, C に対して，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

仮言三段論法

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \quad \Rightarrow \quad (P \to R)$$

例題 3

別証明：任意の集合 A, B, C を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$B \subseteq C$ であると仮定する
3. $x \in A$ であると仮定する
4. (1) と部分集合の定義より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である
5. (2) と部分集合の定義より，$x \in B$ ならば $x \in C$ である
6. (3) と (4) より，$x \in B$ が成り立つ
7. したがって，(5) と (6) より，$x \in C$ が成り立つ
8. したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，任意の集合 A, B, C に対して，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

部分集合に関する重要な性質：復習

次の 3 つはいずれも正しい

例題 1

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \in A \text{ ならば，} \quad x \in B$$

例題 2

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } x \notin B \text{ ならば，} \quad x \notin A$$

例題 3

任意の集合 A, B, C に対して，

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq C \text{ ならば，} \quad A \subseteq C$$

今後断りなく，この 3 つを (再度証明せずに) 用いることがある

目次

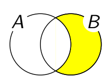
例題 4

次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して，

$$(A \cup B) - A \subseteq B$$

オイラー図による直感



格言

仮定のない集合に対する包含関係は，文章で証明する

格言 (第 2 回講義より)

仮定のない集合に対する等式は，同値変形で証明する

例題 4

証明：任意の集合 A, B を考える

1. $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
2. (1) と集合差の定義より，$x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ
3. (2) より，$x \in A \cup B$ が成り立つ
4. 同じく (2) より，$x \notin A$ が成り立つ
5. (3) と合併の定義より，$x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ
6. したがって，(4) と (5) より，$x \in B$ が成り立つ
7. したがって，$(A \cup B) - A \subseteq B$ である

したがって，任意の集合 A, B に対して，$(A \cup B) - A \subseteq B$ となる □

推論規則 ($\wedge$ の除去)　(演習問題)

$$P \wedge Q \quad \Rightarrow \quad P$$

例題 5

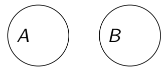
次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

オイラー図による直感



格言

仮定のある集合に対する等式と包含関係は，文章で証明する

例題 5 の解答例

例題 5 の解答例：正しい．理由は以下の通りである．

1. 任意の集合 A, B を考え，$A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
2. $x \in A$ であると仮定する
3. (1) と空集合の定義より，$x \notin A \cap B$ が成り立つ
4. (3) と共通部分の定義より，$x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ
5. (2) と (4) より，$x \notin B$ が成り立つ
6. (2) と (5) と集合差の定義より，$x \in A - B$ が成り立つ
7. したがって，$A \subseteq A - B$ が成り立つ
8. したがって，任意の集合 A, B に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば，$A \subseteq A - B$ となる □

共通部分の定義とド・モルガンの法則より

$$x \notin A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \text{ または } x \notin B$$

例題 6

次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A - B = A - C \text{ ならば } B = C$$

が成り立つ．

格言

オイラー図で直感を得る

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか　(第 5 回講義の復習)

正しい場合

- 先ほどのように証明する

正しくない場合

- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しくない．理由は以下の通りである．

1. 集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$ を考える
2. このとき，$A - B = \{1\}$ と $A - C = \{1\}$ が成り立つ
3. したがって，$A - B = A - C$ が成り立つ
4. 一方，$3 \in B$ かつ $3 \notin C$ なので，$B \neq C$ が成り立つ □

例題 6：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A - B = A - C \text{ ならば } B = C$$

が成り立つ．

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 論理を用いて，部分集合を定義し，それを理解する
- 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- 推論の類型として，4 つの推論規則が使えるようになる
  - モードゥス・ポネンス
  - モードゥス・トレンス
  - 仮言三段論法
  - 選言三段論法

(注：この 4 つの推論規則の名称は重要ではない)