

離散数学 第4回
証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016年10月31日

最終更新 : 2016年10月28日 14:13

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 1 / 44

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1) : 像と逆像 (12月19日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (1月16日)
- 10 関係 (1) : 関係 (1月23日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (1月30日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (2月6日)
- 13 証明法 (4) : 数学的帰納法 (2月13日)
- 14 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (授業等調整日)
- 期末試験 (2月20日?)

注意 : 予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 3 / 44

今日の概要

今日の目標

- ▶ 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ▶ \exists や \forall を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか?

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
 - ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目
- これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 5 / 44

述語論理における重要な恒真式 (復習)

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- ▶ 命題論理式 : できる
- ▶ 述語論理式 : できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- ▶ 命題論理式 : できるかもしれない
- ▶ 述語論理式 : できるかもしれない

しかし、とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには、述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 7 / 44

スケジュール 前半 (予定)

- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (10月3日)
- * 体育の日 (10月10日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (10月17日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (10月24日)
- 4 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 (10月31日)
- * 休講 (11月7日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (11月14日)
- 6 証明法 (3) : 集合に関する証明 (11月21日)
- * 調布祭片付け (11月28日)
- 7 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (12月5日)
- 中間試験 (12月12日)

注意 : 予定の変更もありうる

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 2 / 44

1学期間の概要 (再掲)

主題

- ▶ 理工学のあらゆる分野に現れる**数学の言葉と論理**を徹底的に身につける
- ▶ これによって、論理的な思考を行う基礎能力を体得し、将来的に、専門書を読み解き、自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- ▶ キャッチフレーズは「**語学としての数学**」

達成目標

以下の2項目をすべて達成することを目標とする。

- 1 数学における基本的な用語 (集合, 論理, 写像, 関係) を正しく使うことができる
- 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 4 / 44

述語論理における重要な恒真式 (復習)

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 6 / 44

述語論理における重要な恒真式 (復習)

述語論理における重要な恒真式 (1) : 復習

\forall の否定, \exists の否定 (重要!) — ド・モルガンの法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して、次が成り立つ

$$\neg(\forall x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x))$$
$$\neg(\exists x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D (\neg P(x))$$

\forall の分配法則, \exists の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して、次が成り立つ

$$(\forall x \in D (P(x))) \wedge (\forall x \in D (Q(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x))$$
$$(\exists x \in D (P(x))) \vee (\exists x \in D (Q(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \vee Q(x))$$

交換法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して、次が成り立つ

$$\forall x \in D (\forall y \in D (P(x, y))) \Leftrightarrow \forall y \in D (\forall x \in D (P(x, y)))$$
$$\exists x \in D (\exists y \in D (P(x, y))) \Leftrightarrow \exists y \in D (\exists x \in D (P(x, y)))$$

岡本 吉央 (電通大) 離散数学 (4) 2016年10月31日 8 / 44

述語論理における重要な恒真式 (2) : 復習

∀ の導入, ∃ の導入

任意の議論領域 D と命題 P に対して, 次が成り立つ

$$P \Leftrightarrow \forall x \in D (P)$$

$$P \Leftrightarrow \exists x \in D (P)$$

注: P の中に x は自由変数として現れない

∀ の分配法則, ∃ の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$, 命題 Q に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \vee Q)$$

$$\exists x \in D (P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \wedge Q)$$

注: Q の中に x は自由変数として現れない

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

同値変形による恒真性の証明 : 例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\begin{aligned} \forall x (P(x)) \rightarrow Q &\Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q && \text{(}\forall\text{の否定)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee \exists x (Q) && \text{(}\exists\text{の導入)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q) && \text{(}\exists\text{の分配法則)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q) && \text{(実質含意)} \end{aligned}$$

□

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは?

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

述語論理における重要な恒真式 (3) : 復習

束縛変数の変更

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (P(x)) \Leftrightarrow \forall y \in D (P(y))$$

$$\exists x \in D (P(x)) \Leftrightarrow \exists y \in D (P(y))$$

注: $P(x)$ の中に y は自由変数として現れず,
 $P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

同値変形による恒真性の証明 : 例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(}\forall\text{の否定)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(二重否定の除去)} \end{aligned}$$

□

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

「~が存在する」という命題の証明法 : 例題 1

例題 1 : 次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

- ▶ 記号を使って書くと, 集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ に対して

$$\exists x \in A (x \text{ は素数である})$$

- ▶ A が有限集合なので, 前回のように, \forall を用いて書き直すことで証明できるが, ここでは (練習のため) 違う方法で証明する

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

ある数が素数であることとは何なのか？ 定義を思い出す

素数とは？：素数の定義

自然数 n が素数であるとは、それが 1 と n 以外の自然数で割り切れないこと

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

注意

「証明」と言われたら、文章を書く

普通の証明の書き方は以下の通り

証明：集合 A の要素である 3 を考える。3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので、3 は素数である。したがって、 A には素数が存在する。 □

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

記号を使って書くと、

$$\exists n \in \mathbb{N} ((n \bmod 3 = 2) \wedge (n \bmod 7 = 3))$$

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

要求されている性質

- ▶ 自然数である
- ▶ 3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 である

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し、証明として書くものは清書のみ

下書き

- ▶ 「17」やそれに代わるものを見つける過程を書く
- ▶ 確かに、それが要求されている性質を満たすことを確かめる

清書

- ▶ 前のページのように、まとまった証明を書く

どうしてそうするのか？

- ▶ 「3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する」ことが正しいかどうか、ということだけが読者の興味の対象
- ▶ 証明では、それが確認できさえすればよい

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える。

- ▶ 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので、3 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える。

- ▶ 7 は 1 と 7 以外の自然数で割り切れないので、7 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える。

- ▶ 17 を 3 で割ると、 $17 = 5 \times 3 + 2$ なので、余りは 2 である。
- ▶ 17 を 7 で割ると、 $17 = 2 \times 7 + 3$ なので、余りは 3 である。
- ▶ したがって、3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。 □

疑問点

「17」はどのようにして見つかったのか？

- ▶ 「3 で割ると余りが 2 となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし、 k は非負整数)
- ▶ これを 7 で割った余りが 3 となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき、 $3k + 2 = 2$ で、7 で割った余りは 2
- ▶ $k = 1$ のとき、 $3k + 2 = 5$ で、7 で割った余りは 5
- ▶ $k = 2$ のとき、 $3k + 2 = 8$ で、7 で割った余りは 1
- ▶ $k = 3$ のとき、 $3k + 2 = 11$ で、7 で割った余りは 4
- ▶ $k = 4$ のとき、 $3k + 2 = 14$ で、7 で割った余りは 0
- ▶ $k = 5$ のとき、 $3k + 2 = 17$ で、7 で割った余りは 3

ということなので、17 を考えればよい

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える。

- ▶ 80 を 3 で割ると、 $80 = 26 \times 3 + 2$ なので、余りは 2 である。
- ▶ 80 を 7 で割ると、 $80 = 11 \times 7 + 3$ なので、余りは 3 である。
- ▶ したがって、3 で割ると余りが 2 であり、7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。 □

例題 3：下書き

- ▶ 条件「 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- ▶ よって、 $(x - 2)(x - 3) < 0$ となるような x を考えたい
- ▶ 「 $(x - 2)(x - 3) < 0$ 」は「 $2 < x < 3$ 」と同値
- ▶ なので、2 よりも大きく、3 よりも小さい実数を考えればよい

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 ∃x (P(x)) の証明
- 4 ∀x (P(x)) の証明
- 5 ¬∀x (P(x)) の証明
- 6 今日のまとめ

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

記号を使って書くと、

$$\forall x \in \mathbb{R} (x^2 + 1 \geq 2x)$$

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「～が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

記号を使って書くと、

$$\exists x \in \mathbb{R} (x^2 - 5x + 6 < 0)$$

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

x に要求されている性質

- ▶ x は実数である
- ▶ $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす

「～が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

- ▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

- ▶ したがって、 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x は存在する。 □

今一度強調

- ▶ 選んだものは書く必要がある (この場合は、 $\frac{5}{2}$)
- ▶ $\frac{5}{2}$ がどのように出てきたのかは書く必要がない

嘉田 勝「証明を理解するための考え方」を参照

(数学セミナー 2009 年 5 月号, <http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kada/susemi0905/>)

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$ 。
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

格言

証明は演劇。登場人物とその性格に注意。

登場人物 (記号)	性格 (性質)
x	実数

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

記号を使って書くと、

$$\forall x \in \mathbb{R} ((1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2)$$

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の〜を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して、 $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 異なる素数 $a = 2, b = 3$ を考える。
- ▶ このとき、 $a + b = 2 + 3 = 5$ であり、これは 2 で割り切れない。 □

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の実数 x に対して、 $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 実数 $x = 0$ を考える。
- ▶ このとき、 $x^2 = 0$ であり、 $x^2 > 0$ にはならない。 □

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3) + (1-3x+3x^2-x^3) = 6x^2 + 2.$
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

記号	性質
x	実数

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して、 $a + b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- ▶ その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

∀ の否定 (重要!) — ド・モルガンの法則

$$\neg(\forall x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x))$$

上の命題の否定

ある異なる素数 a, b が存在して、 $a + b$ は 2 で割り切れない

反例： $a + b$ が 2 で割り切れないような、異なる素数 a, b

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の実数 x に対して、 $x^2 > 0$ である

上の命題の否定

ある実数 x に対して、 $x^2 > 0$ ではない

反例： $x^2 > 0$ ではないような実数 x

注意

正しいか正しくないかを見通しは、下書きに書く

目次

- 1 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- 2 同値変形による恒真性の証明
- 3 $\exists x (P(x))$ の証明
- 4 $\forall x (P(x))$ の証明
- 5 $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- 6 今日のまとめ

目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

今日のまとめ：格言一覧

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し、証明として書くものは清書のみ

格言

証明は演劇。登場人物とその性格に注意。

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ▶ \exists や \forall を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
 - ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目
- これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる