離散数学 第 2 回
集合と論理 (2)：集合と論理の対応

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 10 月 17 日

最終更新：2016 年 10 月 13 日　14:29

スケジュール 前半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

今日の目標
- 集合に対する操作を理解し，使える
- 真理値表により命題の恒真性を証明できる
- 同値変形により命題の恒真性を証明できる
- 集合に対する等式を同値変形によって証明できる

注意
次の 3 つを明確に区別する
- 集合に対する操作
- 論理に対する操作
- 実数に対する操作

これら 3 つに対する法則や記法は異なる

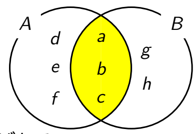
目次

共通部分

共通部分とは？
集合 A, B の共通部分を $A \cap B$ と表記し，
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$
で定義する

例：
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A \cap B = \{a, b, c\}$

オイラー図



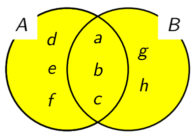
「共通部分」は「積集合」,「交わり」とも呼ばれる

合併

合併とは？
集合 A, B の合併を $A \cup B$ と表記し，
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$
で定義する

例：
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

オイラー図



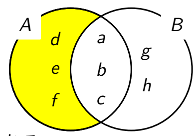
「合併」は「和集合」,「結び」とも呼ばれる

集合差

集合差とは？
集合 A, B に対して，集合差 $A - B$ を
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$
で定義する

例：
- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, g, h\}$ のとき，
- $A - B = \{d, e, f\}$

オイラー図

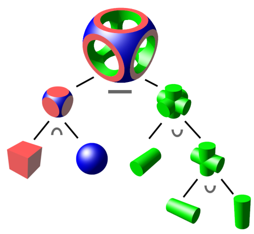


「$A - B$」の代わりに「$A \setminus B$」と書くこともある

集合の演算の応用例：Constructive Solid Geometry

Constructive Solid Geometry

単純な物体に対して集合演算を適用することで，複雑な物体を表現するコンピュータ・グラフィックスの技法



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Csg_tree.png

例えば，POV-Ray でも標準的に使える

命題論理と集合における記号の違い

まとめの表

命題論理	集合
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$

つまり

命題 P, Q に対して　$P \cap Q$　と書いてはいけない！
集合 A, B に対して　$A \wedge B$　と書いてはいけない！

命題と集合を明確に区別しないといけない

目次

恒真式

恒真式 (トートロジー) とは？

命題変数にどのような真理値が割り当てられても，
常に真となる命題論理式

例：「$P \to (Q \to P)$」は恒真式

P	Q	$Q \to P$	$P \to (Q \to P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

恒真式に対する記法

含意を含む恒真式

- 「$P \to Q$」が恒真であるとき，これを次のように書く
$$P \Rightarrow Q$$
- 「$P \Rightarrow Q$」において，次の用語を使うことがある
  - P は「Q が成り立つための十分条件」
  - Q は「P が成り立つための必要条件」

同値を含む恒真式

- 「$P \leftrightarrow Q$」が恒真であるとき，これを次のように書く
$$P \Leftrightarrow Q$$
- 「$P \Leftrightarrow Q$」において，次の用語を使うことがある
  - P を「Q が成り立つための必要十分条件」
  - Q を「P が成り立つための必要十分条件」

重要な恒真式：実質含意

実質含意 (含意の書換)

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ
$$P \to Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

□

証明終了のしるし↑

重要な恒真式：実質含意 (例)

実質含意 (含意の書換)

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ
$$P \to Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee Q$$

例：「コインを投げて表が出たら，100 円もらえる」という遊び

- $P =$「コインを投げて表が出た」
- $Q =$「100 円もらえる」
- $P \to Q =$「コインを投げて表が出たら，100 円もらえる」
- $\neg P \vee Q =$「コインを投げて表が出なかったか，そうでなければ，100 円もらえる」

重要な恒真式：実質同値

実質同値 (同値の書換)

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ
$$P \leftrightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

□

重要な恒真式：排中法則

排中法則

命題変数 P に対して，次の命題論理式は恒真式

$$P \vee \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

□

重要な恒真式：排中法則 (例)

排中法則

命題変数 P に対して，次の命題論理式は恒真式

$$P \vee \neg P$$

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」のとき
- $P \vee \neg P =$ 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，または，愛媛県の県庁所在地は宇和島市ではない」」

重要な恒真式：ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則 (特に重要)

命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$\neg(P \vee Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee \neg Q$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg(P \vee Q)) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg(P \wedge Q)) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T

□

重要な恒真式：ド・モルガンの法則 (例)

ド・モルガンの法則 (特に重要)

命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$\neg(P \vee Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \wedge \neg Q$$

OR の NOT　　NOT の AND

$$\neg(P \wedge Q) \quad \Leftrightarrow \quad \neg P \vee \neg Q$$

AND の NOT　　NOT の OR

例

- $P =$「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- $Q =$「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- $\neg(P \vee Q) =$ 「『愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか，松山市である』ということではない」
- $\neg P \wedge \neg Q =$ 「愛媛県の県庁所在地は宇和島市ではない，かつ，愛媛県の県庁所在地は松山市ではない」

Augustus De Morgan (1806–1871)

オーガスタス・ド・モルガン，インド生まれのイギリスの数学者

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Morgan_Augustus.jpg

重要な恒真式：対偶法則

対偶法則

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$P \rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる．

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

□

重要な恒真式：対偶法則

対偶法則

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

$$P \rightarrow Q \quad \Leftrightarrow \quad \neg Q \rightarrow \neg P$$

例：「欠席したら，落第する」という規則 (?)

- $P \rightarrow Q =$ 「欠席したら，落第する」
- $\neg Q \rightarrow \neg P =$ 「落第していないなら，欠席してない」

恒真式いろいろ (1)

冪等法則

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$
$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

交換法則

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$
$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

吸収法則

$$(P \wedge Q) \vee P \Leftrightarrow P$$
$$(P \vee Q) \wedge P \Leftrightarrow P$$

二重否定の除去

$$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$$

同一法則

$$P \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$$
$$P \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$$

支配法則

$$P \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$$
$$P \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$$

結合法則

$$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$
$$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

恒真式いろいろ (2)

分配法則

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$
$$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

含意の合成

$$(P \to Q) \wedge (P \to R) \Leftrightarrow P \to (Q \wedge R)$$

三段論法

$$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$$

恒真式の利用法

- 恒真式を使って，命題論理式を簡略化できる
  (見た目を単純にできる)
- 恒真式を使って，数学的な証明ができる

これらについては次に扱う…

目次

同値変形とは ?: 例

次が成り立つことを証明したい

$$P \wedge (Q \wedge R) \quad \Leftrightarrow \quad (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)$$

先ほどの「重要な恒真式」と「恒真式いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge P) \wedge (Q \wedge R) && (\wedge \text{ の冪等法則}) \\
&\Leftrightarrow P \wedge (P \wedge (Q \wedge R)) && (\wedge \text{ の結合法則}) \\
&\Leftrightarrow P \wedge ((P \wedge Q) \wedge R) && (\wedge \text{ の結合法則}) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q)) \wedge R && (\wedge \text{ の結合法則}) \\
&\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge P) \wedge R && (\wedge \text{ の交換法則}) \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R) && (\wedge \text{ の結合法則})
\end{aligned}$$

□

同値変形とは？

同値変形とは？

論理式の一部として現れる論理式をそれと同値な論理式で
置き換えること

先ほどの「重要な恒真式」と「恒真式いろいろ」の同値性が使える！

- 実質含意，実質同値
- 排中法則
- ド・モルガンの法則
- 対偶法則
- 冪等法則
- 二重否定の除去
- (吸収法則)
- 交換法則，結合法則
- 分配法則
- 同一法則，支配法則

重要な性質

同値変形によって恒真性は保たれる

同値変形とは ?: 例 2

次が成り立つことを証明したい

$$(P \wedge Q) \to R \quad \Leftrightarrow \quad P \to (Q \to R)$$

先ほどの「重要な恒真式」と「恒真式いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \to R &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R && (\text{実質含意}) \\
&\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{ド・モルガンの法則}) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (\vee \text{ の結合法則}) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \to R) && (\text{実質含意}) \\
&\Leftrightarrow P \to (Q \to R) && (\text{実質含意})
\end{aligned}$$

□

目次

集合に対する操作と論理に対する操作の対応

まとめ：集合と論理に対する操作の対応

集合 A, B に対して

集合		論理
$x \in A \cap B$	$\Leftrightarrow$	$(x \in A) \wedge (x \in B)$
$x \in A \cup B$	$\Leftrightarrow$	$(x \in A) \vee (x \in B)$
$x \in A - B$	$\Leftrightarrow$	$(x \in A) \wedge (x \notin B)$
	$\Leftrightarrow$	$(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$

注意

- $A, B, A \cap B, A \cup B, A - B$ は集合
- $x \in A, x \in B, x \in A \cap B, x \in A \cup B, x \in A - B$ は命題 (真偽が決まる)

集合に対する等式と論理に対する同値の対応

まとめ：集合と論理に対する操作の対応

集合 A, B に対して

集合		論理
$A = B$	$\Leftrightarrow$	$x \in A \leftrightarrow x \in B$

帰結

論理の同値変形を用いることで，集合に対する等式を証明できる

格言

仮定のない集合に対する等式は，同値変形で証明する

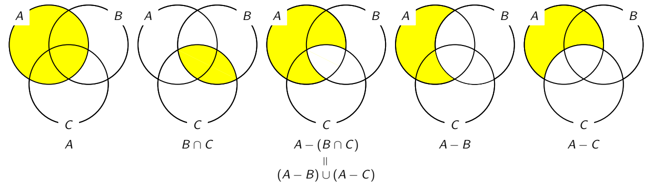
集合に関する等式：例

例題

集合 A, B, C に対する次の等式を証明せよ

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

下書き：証明の前に，オイラー図による直感



目標：次を証明する

$$x \in A - (B \cap C) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A - B) \cup (A - C)$$

集合に関する等式：例 — 証明

例題

集合 A, B, C に対する次の等式を証明せよ

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

証明：

$x \in A - (B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cap C)$ (集合差の定義)

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C)$ (共通部分の定義)

$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C))$ (ド・モルガンの法則)

$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge \neg(x \in C))$ (分配法則)

集合に関する等式：例 — 証明 (続き)

例題

集合 A, B, C に対する次の等式を証明せよ

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

証明 (続き)：

$x \in A - (B \cap C)$

$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge \neg(x \in C))$

$\Leftrightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C)$ (集合差の定義)

$\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$ (合併の定義)

$\square$

目次

今日のまとめ

今日の目標

- 集合に対する操作を理解し，使える
- 真理値表により命題の恒真性を証明できる
- 同値変形により命題の恒真性を証明できる
- 集合に対する等式を同値変形によって証明できる

注意

次の 3 つを明確に区別する

- 集合に対する操作
- 論理に対する操作
- 実数に対する操作

これら 3 つに対する法則や記法は異なる