

9:00–10:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中に入れておくこと.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 次の命題は正しいか, 正しくないか, 理由も付けて答えよ.

任意の集合 A, B に対して, $2^A \subseteq 2^B$ ならば, $A \subseteq B$ が成り立つ.

ただし, 2^A は A の冪集合を表す.

問題 2 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $X \subseteq A$ に対して

$$f(f^{-1}(f(X))) = f(X)$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 3 写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ を, 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して $f(a) = a^3 - a$ であるとして定義する. ただし, \mathbb{Z} は整数全体の集合である. 以下の問いに答えよ.

- 写像 f が全射であるか答えよ. 理由も付けること.
- 写像 f が単射であるか答えよ. 理由も付けること.
- 写像 f が全単射であるか答えよ. 理由も付けること. また, 全単射である場合は, その逆写像が何であるか, 理由も付けて答えよ.

問題 4 集合 A 上の関係 R_1 , 集合 B 上の関係 R_2 に対して, 直積 $A \times B$ 上の関係 R を次のように定義する. すなわち, 任意の $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対して, $(a, b) R (a', b')$ であることを, $a R_1 a'$ かつ $b R_2 b'$ であることとする.

- 関係 R_1, R_2 がともに同値関係であるとき, R も同値関係であることを証明せよ.
- 任意の $a \in A, b \in B$ に対して,

$$[a]_{R_1} \times [b]_{R_2} = [(a, b)]_R$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 5 集合 $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ は自然数 100 の約数をすべて集めて作ったものである. 正整数 a, b に対して, $a | b$ を「 a が b の約数である」ことと定義する.

- 半順序集合 $(D, |)$ のハッセ図を描け. (理由を記す必要はない.)
- 半順序集合 $(D, |)$ に対して, 次に該当するものをすべて挙げよ. ただし, 該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ. (理由を記す必要はない.)
 - $\{4, 10\}$ の上界.
 - $\{20, 50, 100\}$ の下限.
 - $\{4, 10, 50\}$ の最小元.
 - $\{2, 25, 50\}$ の最大元.

問題 6 集合 $A = \{7, 11\}$ を考え, 整数の集合 B を次のように再帰的に定義する.

- $0 \in B$.
- $x \in A$ かつ $y \in B$ ならば, $x + y \in B$ である.
- 上のようにして生成される整数のみが B の要素である.

以下の問いに答えよ.

- 集合 B の要素の中で, 10 以上 30 未満のものをすべて挙げよ.
- 集合 B の任意の要素 y に対して, 0 以上のある整数 m, n が存在して, $y = 7m + 11n$ となることを証明せよ.