提出締切： 2017 年 2 月 13 日 講義終了時

授業内問題 13.1 任意の正の整数 n に対して，a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数 n に対して

$$a_n = 2^n - 1$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 13.2 任意の正の整数 n に対して

$$8^n - 3^n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 13.3 任意の正の整数 n に対して

$$2n \le 2^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 13.4 3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$6n \le 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．

復習問題 13.5 任意の正の整数 n に対して，a_n を

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} + 2 & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$a_n = 2n - 1$$

となることを証明せよ．

復習問題 13.6 任意の正の整数 n に対して，第 n 番フィボナッチ数 F_n を

$$F_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ F_{n-1} + F_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．任意の正整数 n に対して

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = (-1)^n$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 13.7 第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正の整数 n に対して，

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 13.8 任意の正の整数 n に対して

$$11^n - 4^n \text{ が } 7 \text{ で割り切れる}$$

ことを数学的帰納法により証明せよ．

追加問題 13.9 3 以上の任意の正の整数 n に対して

$$3n^2 \le 3^n$$

となることを数学的帰納法により証明せよ．(ヒント：問題 13.4 の結果を用いてもよい．)

追加問題 13.10 任意の正の整数 n に対して，C_n を次のように定義する

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{4n-2}{n+1}C_{n-1} & (n > 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，任意の正の整数 n に対して，

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

となることを証明せよ．(補足：C_n はカタラン数と呼ばれ，よく研究されているものである．)

追加問題 13.11 任意の正の整数 n に対して，a_n を

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 7 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．2 以上の任意の正整数 $n \ge 2$ に対して

$$a_n < 3^n$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：基底段階に注意せよ．)

追加問題 (発展) 13.12 第 n 番フィボナッチ数を F_n とするとき，任意の正の整数 n に対して，

$$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \text{ および } F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題（発展）13.13　2 以上の任意の整数 n に対して，次が正しいことを証明したい．

> 平面上で，どの 2 つも平行でないような任意の n 個の直線 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ はある 1 点で交わる．

次の数学的帰納法による証明は正しく見えるが，この命題自体は正しくない．すなわち，証明には誤りがある．証明の誤りを見つけ，指摘せよ．

> 数学的帰納法により証明を行う．
>
> [基底段階] $n = 2$ のとき，平行でない 2 つの直線は必ず 1 点で交わるので，命題は正しい．
>
> [帰納段階] $n = k \geq 2$ のとき，この命題が正しいと仮定する．証明すべきことは，平面上で，どの 2 つも平行でないような任意の $k+1$ 個の直線 $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{k+1}$ がある 1 点で交わることである．
>
> $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k$ を考えると，帰納法の仮定から，これらはある 1 点で交わる．その交点を p とする．
>
> また，$\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{k-1}, \ell_{k+1}$ を考えると，帰納法の仮定から，これらはある 1 点で交わる．その交点を q とする．
>
> ここで，p も q も ℓ_1 と ℓ_2 の交点であり，平行でない 2 直線は 1 点でしか交わらないので，$p = q$ である．
>
> すなわち，$\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{k+1}$ は 1 点 p を共有する．
>
> □