

提出締切：2017年2月8日 講義終了時

授業内問題 12.1 集合 $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ は自然数 100 の約数をすべて集めて作ったものである。正整数 a, b に対して、 $a | b$ を「 a が b の約数である」ことと定義する。

1. 半順序集合 $(D, |)$ のハッセ図を描け。(理由を記す必要はない。)
 2. 半順序集合 $(D, |)$ に対して、次に該当するものをすべて挙げよ。ただし、該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ。(理由を記す必要はない。)
1. $\{4, 10\}$ の上界.
 2. $\{20, 50, 100\}$ の下限.
 3. $\{4, 10, 50\}$ の最小元.
 4. $\{2, 25, 50\}$ の最大元.

復習問題 12.2 次に挙げるそれぞれの半順序集合に対して、そのハッセ図を描け。

1. $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$. ただし、 $a | b$ であることを「 a は b の約数である」と定義する。
2. $(2^{\{1, 2, 3\}}, \subseteq)$.
3. $(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$.

復習問題 12.3 問題 12.2 の 1 に現れる半順序集合に対して、次に該当するものをすべて挙げよ。ただし、該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ。(いずれの場合も理由を添える必要はない。)

1. $\{2, 3\}$ の上界.
2. $\{2\}$ の上界.
3. $\{2, 5\}$ の上界.
4. $\{2, 3\}$ の下界.
5. $\{2\}$ の下界.
6. $\{2, 6\}$ の下界.
7. $\{2, 3, 4\}$ の極大元.
8. $\{2, 3, 4\}$ の極小元.
9. $\{2, 3, 6\}$ の最大元.
10. $\{2, 3\}$ の最大元.
11. $\{1, 2, 3\}$ の最小元.
12. $\{2, 3\}$ の最小元.
13. $\{2, 3\}$ の上限.
14. $\{2\}$ の上限.
15. $\{2, 3\}$ の下限.
16. $\{2\}$ の下限.

復習問題 12.4 全順序集合 (\mathbb{R}, \leq) と $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$ を考える。このとき、 (\mathbb{R}, \leq) において B の極大元が存在しないことを証明せよ。

補足問題 12.5 全順序集合 (A, \preceq) を考える。このとき、任意の $a, b \in A$ に対して、 $a \not\preceq b$ であることと $a \succ b$ であることが同値であることを証明せよ。

補足問題 12.6 半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$ を考える。

1. b_1 と b_2 が B の最大元であるならば、 $b_1 = b_2$ となることを証明せよ。
2. b が B の最大元であるならば、 b は B の極大元であることを証明せよ。
3. a_1 と a_2 が B の上限であるならば、 $a_1 = a_2$ となることを証明せよ。

追加問題 12.7 $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}, |)$ という半順序集合のハッセ図を描け。

追加問題 12.8 半順序集合 $(2^{\{1, 2, 3, 4\}}, \subseteq)$ のハッセ図を描け。

追加問題 12.9 全順序集合 (\mathbb{R}, \leq) を考える。このとき、 (\mathbb{R}, \leq) において \mathbb{R} の上限が存在しないことを証明せよ。

追加問題 12.10 問題 12.7 に現れる半順序集合に対して、次に該当するものをすべて挙げよ。ただし、該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ。(いずれの場合も理由を添える必要はない。)

1. $\{2, 3\}$ の上界.
2. $\{3, 5\}$ の上界.
3. $\{6, 10\}$ の下界.
4. $\{8, 10, 12\}$ の下界.
5. $\{2, 3, 4, 5\}$ の極大元.
6. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極大元.
7. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極小元.
8. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ の極小元.
9. $\{2, 4, 6\}$ の最大元.
10. $\{2, 5, 10\}$ の最大元.
11. $\{2, 4, 6\}$ の最小元.
12. $\{2, 5, 10\}$ の最小元.
13. $\{2, 4, 6\}$ の上限.
14. $\{2, 5, 10\}$ の上限.
15. $\{2, 5, 10\}$ の下限.
16. $\{6, 8, 12\}$ の下限.

追加問題 12.11 半順序集合 (A, \preceq) と $B \subseteq A$ に対して、 $a \in A$ が B の上限であるとする。このとき、 $a \in B$ ならば、 a は B の最大元であることを証明せよ。

追加問題 (発展) 12.12 集合 A に対して、 $(2^A, \subseteq)$ という半順序集合を考える。以下の問いに答えよ。

1. 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して、 $\{X, Y\}$ の上限が $X \cup Y$ となることを証明せよ。
2. 任意の $X, Y \in 2^A$ に対して、 $\{X, Y\}$ の下限が $X \cap Y$ となることを証明せよ。