離散数学 (11) 2017 年 1 月 30 日

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2017 年 2 月 6 日 講義終了時

授業内問題 11.1 2 つの実数から成る順序対の集合 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ として，次のものを考える．

$$A = \{(1,1),(1,3),(2,0),(2,2),(3,-1)\}.$$

以下の問いに答えよ．

1. 集合 A 上の関係 $\sim$ を次のように定義する．すなわち，任意の $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$ に対して，$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2)$ であることを $x_1+y_1 = x_2+y_2$ であることとする．このとき，関係 $\sim$ は A 上の同値関係となるが (これは証明しなくてよい)，商集合 $A \,/\! \sim$ がどのような集合であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．また，商集合の要素数 $|A \,/\! \sim|$ が何であるかも答えよ．

2. 集合 A 上の関係 $\approx$ を次のように定義する．すなわち，任意の $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$ に対して，$(x_1,y_1) \approx (x_2,y_2)$ であることを $x_1^2+y_1^2 = x_2^2+y_2^2$ であることとする．このとき，関係 $\approx$ は A 上の同値関係となるが (これは証明しなくてよい)，商集合 $A \,/\! \approx$ がどのような集合であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．また，商集合の要素数 $|A \,/\! \approx|$ が何であるかも答えよ．

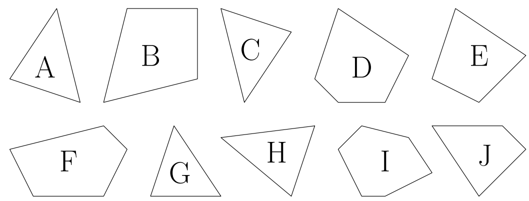
復習問題 11.2 集合 A の分割 P を考える．このとき，集合 A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，$x \,\mathrm{R}\, y$ であることを，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$ であることとする．このとき，R が A 上の同値関係となることを証明せよ．

復習問題 11.3 集合 A 上の同値関係 R に対して，R に関する A の商集合 $A \,/\, \mathrm{R}$ が A の分割であることを証明せよ．

補足問題 11.4 集合 A 上の同値関係 R と，任意の要素 $a, a' \in A$ を考える．このとき，$a \,\mathrm{R}\, a'$ ならば，$[a]_{\mathrm{R}} = [a']_{\mathrm{R}}$ となることを証明せよ．

追加問題 11.5 集合 $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 上の同値関係 $\equiv_2$ を考える ($\equiv_2$ の定義は復習問題 10.7 を参照のこと)．このとき，商集合 $A \,/ \equiv_2$ がどのような集合であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．また，商集合の要素数 $|A \,/ \equiv_2|$ が何であるかも答えよ．

追加問題 11.6 次に示す平面上の凸多角形 A, B, ..., J から構成される集合を S とする．つまり，$S = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{J}\}$ である．集合 S 上の関係 $\sim$ を次のように定義する．すなわち，任意の $P, Q \in S$ に対して，$P \sim Q$ であることを P と Q の頂点数が等しいこととする．以下の問いに答えよ．



1. この関係 $\sim$ が S 上の同値関係であることを証明せよ．

2. 商集合 $S \,/\! \sim$ が何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．また，商集合の要素数 $|S \,/\! \sim|$ が何であるかも答えよ．

追加問題 11.7 集合 A 上の同値関係 R に対して，写像 $g\colon A \to A \,/\, \mathrm{R}$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a \in A$ に対して，$g(a) = [a]_{\mathrm{R}}$ とする．このとき，g が全射となることを証明せよ．

追加問題 11.8 集合 A 上の関係 R_1，集合 B 上の関係 R_2 に対して，直積 $A \times B$ 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $(a,b),(a',b') \in A \times B$ に対して，$(a,b)\mathrm{R}(a',b')$ であることを，$a \,\mathrm{R}_1\, a'$ かつ $b \,\mathrm{R}_2\, b'$ であることとする．

1. 関係 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ がともに同値関係であるとき，R も同値関係であることを証明せよ．

2. 任意の $a \in A, b \in B$ に対して，

$$[a]_{\mathrm{R}_1} \times [b]_{\mathrm{R}_2} = [(a,b)]_{\mathrm{R}}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 (発展) 11.9 任意の集合 A, B と任意の写像 $f\colon A \to B$ を考える．A 上の関係 R を次のように定義する．すなわち，任意の $x, y \in A$ に対して，$x \,\mathrm{R}\, y$ であることを $f(x) = f(y)$ であることとする．このとき，R が同値関係となることは演習問題 10.10 で既に確認した．この同値関係 R を用いて，写像 $g\colon A \to A \,/\, \mathrm{R}$ を次のように定義する．すなわち，任意の $a \in A$ に対して，$g(a) = [a]_{\mathrm{R}}$ とする．また，写像 $j\colon f(A) \to B$ を次のように定義する．すなわち，任意の $b \in f(A)$ に対して，$j(b) = b$ とする．

このとき，$f = (j \circ h) \circ g$ を満たす全単射 $h\colon A \,/\, \mathrm{R} \to f(A)$ が存在することを証明せよ．また，そのような全単射はただ 1 つしか存在しないことを証明せよ．(ヒント：実際にそのような全単射を構成してみよ．)

補足：演習問題 11.7 より，g は全射である．また，j が単射であることも確認できる．すなわち，この問題の解答から,「任意の写像は全射，全単射，単射の合成として表現できる」ということが分かる．