

提出締切：2017年1月30日 講義終了時

**授業内問題 10.1** 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  の上の関係  $R$  を次のように定義する. すなわち,

任意の  $x, y \in A$  に対して  $x R y$  であることを  $|x - y| \leq 2$  であることと定義する.

関係  $R$  を表現するグラフを描け. また, 関係  $R$  が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ.

**復習問題 10.2** 次に挙げるそれぞれの集合  $A$  とその上の関係  $R$  に対して,  $R$  を表現するグラフを描け. また, それぞれの関係  $R$  が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ.

1. 集合  $A = \{1, 2, 3, 6\}$  上の関係  $R$  で, 任意の  $x, y \in A$  に対して  $x R y$  であることを  $x$  が  $y$  の約数であることと定義する.
2. 集合  $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  上の関係  $R$  で, 任意の  $X, Y \in A$  に対して  $X R Y$  であることを  $X \subseteq Y$  と定義する.
3. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  で, 任意の  $x, y \in A$  に対して  $x R y$  であることを  $x < y$  と定義する.
4. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  で, 任意の  $x, y \in A$  に対して  $x R y$  であることを  $x = y$  と定義する.
5. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  上の関係  $R$  で, 任意の  $x, y \in A$  に対して  $x R y$  であることを  $x \equiv y \pmod{3}$  と定義する.

**復習問題 10.3**  $\mathbb{R}$  上の大小関係  $\leq$  が全順序であることを証明せよ.

**復習問題 10.4** 任意の集合  $A$  に対して, その冪集合  $2^A$  上の関係  $\subseteq$  が半順序であることを証明せよ.

**復習問題 10.5** 1以上の整数全体の集合を  $\mathbb{Z}_+$  と書くことにする.  $\mathbb{Z}_+$  上の関係  $|$  を次のように定義する. すなわち, 任意の  $a, b \in \mathbb{Z}_+$  に対して  $a | b$  であることは  $a$  が  $b$  の約数であることとする. このとき,  $|$  が半順序であることを証明せよ.

**復習問題 10.6**  $\mathbb{R}$  上の関係  $=$  が同値関係であることを証明せよ.

**復習問題 10.7**  $p$  を 1 以上の整数として,  $\mathbb{N}$  を 0 以上の整数全体の集合とする.  $\mathbb{N}$  上の関係  $\equiv_p$  を次のように定義する. すなわち, 任意の  $m, n \in \mathbb{N}$  に対して  $m \equiv_p n$  であることは  $m \equiv n \pmod{p}$  であることとする. このとき,  $\equiv_p$  が同値関係であることを証明せよ.

**追加問題 10.8** 集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  上の次の関係  $R_1, R_2, R_3$  に対して, その関係を表現するグラフを描け. また, それぞれの関係が (a) 反射性を持つか答えよ. (b) 完全性を持つか答えよ. (c) 対称性を持つか答えよ. (d) 反対称性を持つか答えよ. (e) 推移性を持つか答えよ.

1. 任意の  $x, y \in A$  に対して,  $x R_1 y$  であることを  $x - y \leq 1$  であることとする.
2. 任意の  $x, y \in A$  に対して,  $x R_2 y$  であることを  $|x - y| \leq 1$  であることとする.
3. 任意の  $x, y \in A$  に対して,  $x R_3 y$  であることを  $x^2 - y^2 = 0$  であることとする.

**追加問題 10.9**  $\mathbb{R}^2$  上の関係  $\preceq$  を次のように定義する. すなわち, 任意の  $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$  に対して,  $(x, x') \preceq (y, y')$  であることを  $x \leq y$  かつ  $x' \leq y'$  であることとする. このとき,  $\preceq$  が半順序となることを証明せよ.

**追加問題 10.10** 任意の集合  $A, B$  と任意の写像  $f: A \rightarrow B$  を考える.  $A$  上の関係  $R$  を次のように定義する. すなわち, 任意の  $x, y \in A$  に対して,  $x R y$  であることを  $f(x) = f(y)$  であることとする. このとき,  $R$  が同値関係となることを証明せよ.

**追加問題 (発展) 10.11**  $\mathbb{R}^2$  上の関係  $\preceq$  を次のように定義する. すなわち, 任意の  $(x, x'), (y, y') \in \mathbb{R}^2$  に対して,  $(x, x') \preceq (y, y')$  であることを

$$x \geq y \text{ ならば } \lceil x = y \text{ かつ } x' \leq y' \rceil$$

であることとする. このとき,  $\preceq$  が全順序となることを証明せよ. (ヒント:  $\mathbb{R}$  上の大小関係  $\leq$  が完全性, すなわち, 任意の  $x, y \in \mathbb{R}$  に対して  $\lceil x \leq y \text{ または } y \leq x \rceil$  が成り立つ, というものを使って, 場合分けを行ってみよ.) (補足: これは  $\mathbb{R}^2$  上の辞書式順序と呼ばれるものである.)