

提出締切：2017年1月23日 講義終了時

授業内問題 9.1 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 5a - 3$ であるとして定義する。写像 f が (a) 全射であるか答えよ。 (b) 単射であるか答えよ。 (c) 全単射であるか答えよ。理由も付けること。そして、 (d) 全単射である場合は、その逆写像が何であるか、理由も付けて答えよ。

復習問題 9.2 集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ に対して、次で定義される各写像が (a) 全射であるか答えよ。 (b) 単射であるか答えよ。 (c) 全単射であるか答えよ。理由も付けること。

1. $f_1: A \rightarrow B$ で、 $f_1(1) = 1$, $f_1(2) = 3$, $f_1(3) = 1$, $f_1(4) = 3$.
2. $f_2: A \rightarrow B$ で、 $f_2(1) = 3$, $f_2(2) = 1$, $f_2(3) = 3$, $f_2(4) = 2$.
3. $f_3: B \rightarrow A$ で、 $f_3(1) = 2$, $f_3(2) = 4$, $f_3(3) = 2$.
4. $f_4: B \rightarrow A$ で、 $f_4(1) = 2$, $f_4(2) = 1$, $f_4(3) = 3$.
5. $f_5: B \rightarrow B$ で、 $f_5(1) = 2$, $f_5(2) = 2$, $f_5(3) = 1$.
6. $f_6: B \rightarrow B$ で、 $f_6(1) = 3$, $f_6(2) = 1$, $f_6(3) = 2$.

復習問題 9.3 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$ であるとして定義する。

1. 写像 f が全射であることを証明せよ。
2. 写像 f が単射であることを証明せよ。
3. 写像 f の逆写像 $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が何であるか、理由も付けて答えよ。

復習問題 9.4 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する。

1. 写像 f が全射ではないことを証明せよ。
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ。

補足問題 9.5 実数の集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して、写像 $f: A \rightarrow B$ を任意の $a \in A$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する。以下のように A と B を定めるとき、写像 f が (a) 全射であるか答えよ。 (b) 単射であるか答えよ。 (c) 全単射であるか答えよ。理由も付けること。そして、 (d) 全単射である場合は、その逆写像が何であるか、理由も付けて答えよ。

1. $A = \mathbb{R}$, $B = [0, \infty)$.
2. $A = [0, \infty)$, $B = [0, \infty)$.
3. $A = [0, 1]$, $B = [0, \infty)$.

補足問題 9.6 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。このとき、 f が全単射であるならば、 f の逆写像が存在することを証明せよ。(ヒント：まず、「任意の $b \in B$ に対して、 $b = f(a)$ を満たす $a \in A$ が ただ一つ 存在する」ことを証明せよ。)

補足問題 9.7 この演習問題の目標は、任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 f の逆写像が存在するとき、 f が全単射であることを証明することである。次の流れに沿って証明を行ってみよ。

1. 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して、写像 $g \circ f$ が全射であるならば、 g も全射であることを証明せよ。
2. 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して、写像 $g \circ f$ が単射であるならば、 f も単射であることを証明せよ。
3. 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 f の逆写像が存在するならば、 f が全単射であることを証明せよ。

補足問題 9.8 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f: A \rightarrow B$ と任意の写像 $g: B \rightarrow A$ を考える。このとき、 g が f の逆写像であることと $g \circ f = \text{id}_A$ が成り立つことが同値であることを証明せよ。(ヒント：「 $g \circ f = \text{id}_A$ が成り立つとき、 g が f の逆写像である」ことを証明するとき、 f が全射であるという性質を利用せよ。)

補足問題 9.9 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f: A \rightarrow B$ と任意の写像 $g: B \rightarrow A$ を考える。このとき、 g が f の逆写像であることと $f \circ g = \text{id}_B$ が成り立つことが同値であることを証明せよ。(ヒント：「 $f \circ g = \text{id}_B$ が成り立つとき、 g が f の逆写像である」ことを証明するとき、 f が単射であるという性質を利用せよ。)

補足問題 9.10 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える。写像 f が全単射であるとき、その逆写像 f^{-1} も全単射であることを証明せよ。

追加問題 9.11 次のそれぞれの写像が (a) 全射であるか答えよ. (b) 単射であるか答えよ. (c) 全単射であるか答えよ. 理由も付けること. そして, (d) 全単射である場合は, その逆写像が何であるか, 理由も付けて答えよ.

1. $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $f_1(a) = a^3$.
2. $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $f_2(a) = 2^a$.
3. $f_3: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ で, 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して, $f_3(a) = 2a+1$.
(ただし, \mathbb{Z} は整数全体の集合を表す.)
4. $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して, $f_4(a) = a^3 - a$.

追加問題 9.12 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して, f と g が全射であるとき, $g \circ f$ も全射であることを証明せよ.

追加問題 9.13 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して, f と g が単射であるとき, $g \circ f$ も単射であることを証明せよ.

追加問題 (発展) 9.14 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える. このとき, f が全射であるとき, そのときに限り, 任意の $Y \subseteq B$ に対して $Y = f(f^{-1}(Y))$ が成り立つことを証明せよ.

追加問題 (発展) 9.15 任意の集合 A, B と任意の写像 $f: A \rightarrow B$ を考える. このとき, f が単射であるとき, そのときに限り, 任意の $X \subseteq A$ に対して $X = f^{-1}(f(X))$ が成り立つことを証明せよ.

追加問題 (発展) 9.16 1つ以上の整数の集合 $X \subseteq \mathbb{Z}$ に対して, X の要素である整数の中で最も小さいものを $\min X$ と表すことにする. 例えば, $X = \{-3, 0, 2\}$ であるとき, $\min X = -3$ である.

写像 $f: 2^{\mathbb{Z}} \rightarrow 2^{\mathbb{Z}}$ を, 任意の $X \in 2^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\min X\} & (X \neq \emptyset \text{ のとき}), \\ \emptyset & (X = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

であると定義する. 以下の問いに答えよ.

1. 写像 f が全射であることを証明せよ.
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ.

(注意: 発展問題であるが, 何を問われているのか理解することが難しいかもしれない. 何を問われているのか理解できれば, 証明自体は難しくくない.)