

提出締切：2017年1月16日 講義終了時

授業内問題 8.1 集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ に対して, 写像 $f: A \rightarrow B$ を $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 3$ で定義する. このとき, 次の集合は何になるか? その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ. なお, 定義されない場合は「定義されない」と答えよ.

1. $f(\{a\})$.
2. $f(\{b, c\})$.
3. $f(\{a, b, c\})$.
4. $f^{-1}(\{1\})$.
5. $f^{-1}(\{2\})$.
6. $f^{-1}(\{3\})$.
7. $f^{-1}(\{1, 2\})$.
8. $f^{-1}(\{2, 3\})$.

復習問題 8.2 集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8\}$ に対して, 写像 $f: A \rightarrow B$ を $f(1) = 6, f(2) = 6, f(3) = 7, f(4) = 7, f(5) = 8$ で定義する. このとき, 次の集合は何になるか? その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ. なお, 定義されない場合は「定義されない」と答えよ.

1. $f(\{1, 2\})$.
2. $f(\{1, 2, 3\})$.
3. $f(\{1, 2, 3, 4\})$.
4. $f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$.
5. $f(\{2\})$.
6. $f^{-1}(\{6\})$.
7. $f^{-1}(\{6, 7\})$.
8. $f^{-1}(\{6, 7, 8\})$.
9. $f^{-1}(\{7, 8\})$.
10. $f^{-1}(\{6, 8\})$.

復習問題 8.3 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$ に対して, 写像 $f: A \rightarrow B$ を $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$ で, 写像 $g: B \rightarrow C$ を $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$ で定義する. このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ はどのような写像であるか? すべての $a \in A$ に対して $(g \circ f)(a)$ が何であるか定めよ.

復習問題 8.4 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ に対して,

$$X \subseteq X' \quad \text{ならば} \quad f(X) \subseteq f(X')$$

となることを証明せよ.

追加問題 8.5 集合 A, B, C を $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9, 10\}$ と定義する. 写像 $f: A \rightarrow B$ を $f(1) = 5, f(2) = 5, f(3) = 6$ で定義する. 写像 $g: B \rightarrow C$ を $g(4) = 8, g(5) = 8, g(6) = 9, g(7) = 10$ で定義する. このとき, 次の集合がそれぞれ何であるか, その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ. なお, 定義されない場合は「定義されない」と答えよ.

1. $f(\{1, 2, 3\})$.
2. $f(\{1, 2\})$.
3. $g(\{4, 5, 6\})$.
4. $g(\{5, 6, 7\})$.
5. $f^{-1}(\{4, 5\})$.
6. $f^{-1}(\{4, 5, 6, 7\})$.
7. $g^{-1}(\{8, 9\})$.
8. $g^{-1}(\{8, 9, 10\})$.
9. $f^{-1}(f(\{1, 3\}))$.
10. $f^{-1}(g^{-1}(\{8, 9\}))$.
11. $f(\emptyset)$.
12. $g^{-1}(\emptyset)$.

追加問題 8.6 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $X, X' \subseteq A$ に対して

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$$

が成り立つことを証明せよ.

追加問題 8.7 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $Y, Y' \subseteq B$ に対して

$$Y \subseteq Y' \quad \text{ならば} \quad f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

となることを証明せよ.

追加問題 8.8 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $X \subseteq A$ に対して

$$X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

が成り立つことを証明せよ.

追加問題 8.9 任意の集合 A, B, C , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, 任意の集合 $Z \subseteq C$ に対して,

$$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 直感を得るためには, まず, この両辺に書かれている集合が A, B, C の中のどれの部分集合であるのか, 判定せよ. 証明を書き下す際には, $(g \circ f)^{-1}(Z) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(Z))$ と $f^{-1}(g^{-1}(Z)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(Z)$ を別々に証明すればよい.)

追加問題 (発展) 8.10 任意の集合 A, B, C , 任意の写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 任意の集合 $X \subseteq A, Z \subseteq C$ に対して,

$$f(X) \subseteq g^{-1}(Z) \quad \text{ならば} \quad (g \circ f)(X) \subseteq Z$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 変数の作用域 (スコープ) に注意.)