離散数学 (5) 2016 年 11 月 14 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2016 年 11 月 21 日 講義終了時

授業内問題 5.1 次の命題を証明せよ．

> 実数 x が $x^2 = 1$ を満たすとき，$x = 1$ または $x = -1$ が成り立つ．

授業内問題 5.2 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の整数 a, b に対して，ある整数 c, d が存在して，$a^2 - b^2 = cd$ となる．

復習問題 5.3 次の命題を証明せよ．

> 実数 x が $x > 3$ を満たすとき，$x^2 > 9$ が成り立つ．

復習問題 5.4 次の命題を証明せよ．

> 実数 x が $x^2 - 3x + 2 = 0$ を満たすとき，$x = 1$ または $x = 2$ が成り立つ．

復習問題 5.5 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 実数 x が $x^2 > 9$ を満たすとき，$x > 3$ が成り立つ．

復習問題 5.6 実数 x と y に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ．

(1) $xy = 1$ である．

(2) 0 ではないある実数 t が存在して，$x = t$ かつ $y = 1/t$ である．

復習問題 5.7 次の命題を証明せよ．

> 任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$x + y = 0$ となる．

復習問題 5.8 次の命題を証明せよ．

> ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$xy = 0$ となる．

復習問題 5.9 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$x + y = 0$ となる．

復習問題 5.10 次の命題を対偶により証明せよ．

> 実数 a, b を考える．任意の正実数 ϵ に対して $a < b + \epsilon$ が成り立つならば，$a \leq b$ が成り立つ．

復習問題 5.11 次の命題を背理法により証明せよ．

> 実数 a, b が $a^2 + b = 13$ と $b \neq 4$ を満たすならば，$a \neq 3$ が成り立つ．

補足問題 5.12 任意の命題変数 P, Q, R に対して，次が成り立つことを証明せよ．(真理値表による証明と同値変形による証明のどちらでも構わない．)

1. $P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathsf{F}$.
2. $P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \rightarrow \mathsf{F}$.

追加問題 5.13 次の命題を証明せよ．

> 実数 x が $x^4 = 16$ を満たすとき，$x = -2$ または $x = 2$ が成り立つ．

(注意：「x が実数である」という性質をどこで使うのか明示すること．)

追加問題 5.14 実数 x に対して，次の 2 つが同値であることを証明せよ．

(1) $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = 0$ を満たす．

(2) $x = 3$ である．

(注意：「x が実数である」という性質をどこで使うのか明示すること．)

追加問題 5.15 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$xy = 0$ となる．

追加問題 5.16 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の実数 x に対して，ある実数 y が存在して，$xy = 1$ となる．

追加問題 5.17 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> ある実数 x が存在して，任意の実数 y に対して，$xy = 1$ となる．

追加問題 5.18 次の命題を証明せよ．

> 任意の実数 x に対して，$x > 2$ ならば，ある整数 n に対して，$x < n < x^2$ が成り立つ．

追加問題 5.19 次の命題を背理法により証明せよ．

> 任意の異なる正整数 n, m に対して，$n^2 = 1$ ならば，$m^2 \neq 1$ が成り立つ．

追加問題 (発展) 5.20 次の命題はどれも正しい．証明せよ．

1. 任意の正実数 ε に対して，ある正実数 δ が存在して，任意の正実数 x に対して，$x < \delta$ ならば，$x^2 < \varepsilon$ である．
2. 任意の正整数 K に対して，ある正整数 k が存在して，任意の正整数 n に対して，$n > k$ ならば，$\log_2 n > K$ である．

追加問題 (発展) 5.21 次の命題を背理法により証明せよ．

> 実数 a, b が $a \neq 0, b \neq 0, a < \frac{1}{a} < b < \frac{1}{b}$ を満たすとき，$a < -1$ が成り立つ．