

提出締切：2016年11月14日 講義終了時

授業内問題 4.1 次の命題を証明せよ。

3で割ると余りが1であり，7で割ると余りが5  
であるような自然数が存在する。

授業内問題 4.2 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ。

任意の実数  $x$  に対して， $x^3 \geq 0$  である。

復習問題 4.3 同値変形によって，任意の命題関数  $P(x)$ ， $Q(x)$  に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.4 同値変形によって，任意の命題関数  $P(x)$  と命題変数  $Q$  に対して

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

が成り立つことを証明せよ。

復習問題 4.5 次の命題を証明せよ。

集合  $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$  には素数が存在する。

復習問題 4.6 次の命題を証明せよ。

3で割ると余りが2であり，7で割ると余りが3  
である自然数が存在する。

復習問題 4.7 次の命題を証明せよ。

$x^2 - 5x + 6 < 0$  を満たす実数が存在する。

復習問題 4.8 次の命題を証明せよ。

任意の実数  $x$  に対して， $x^2 + 1 \geq 2x$  である。

復習問題 4.9 次の命題を証明せよ。

任意の実数  $x$  に対して， $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$  である。

復習問題 4.10 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ。

任意の異なる素数  $a, b$  に対して， $a+b$  は2で割り切れる。

復習問題 4.11 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ。

任意の実数  $x$  に対して， $x^2 > 0$  である。

追加問題 4.12 同値変形によって，任意の命題関数  $P(x)$ ， $Q(x)$  に対して

$$\exists x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \exists x (Q(x)))$$

が成り立つことを証明せよ。

追加問題 4.13 同値変形によって，任意の命題関数  $P(x)$  と命題  $Q$  に対して次が成り立つことを証明せよ。ただし， $Q$  の中に  $x$  は自由変数として現れないものとする。

1.  $\forall x (P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \exists x (P(x)) \rightarrow Q$ .
2.  $\forall x (Q \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \rightarrow \forall x (P(x))$ .

追加問題 (発展) 4.14 同値変形によって，任意の命題関数  $P(x), Q(x)$  と命題  $R$  に対して次が成り立つことを証明せよ。ただし， $R$  の中に  $x, y$  は自由変数として現れないものとする。

1.  $(\exists x (P(x)) \vee R) \rightarrow \forall x (Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (\forall y ((P(x) \vee R) \rightarrow Q(y)))$ .

追加問題 4.15 次の命題を証明せよ。

$x^2 + y^2 - 2xy = 1$  を満たす実数  $x$  と  $y$  が存在する。

追加問題 4.16 次の命題を証明せよ。

ある自然数  $n$  が存在して， $n$  を3で割った余りは2であり， $n^2$  を3で割った余りは1である。

追加問題 4.17 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ。

任意の実数  $x$  に対して， $(4x-3)^2 + 2 \geq (2x-3)^2$  となる。

追加問題 4.18 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ。

任意の自然数  $n$  に対して， $n^2 + 12 \geq 7n$  となる。