離散数学 (3) 2016 年 10 月 24 日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2016 年 10 月 31 日 講義終了時

授業内問題 3.1 次の文の表す命題を述語論理式として表現せよ．数を比較するために，等号や不等号を用いてもよい．ただし，自然数全体の集合は $\mathbb{N}$，実数全体の集合は $\mathbb{R}$ で表せ．

1. すべての自然数 n に対して，$n \geq 0$ である．
2. ある実数 x が存在して，$x^2 < 0$ である．

授業内問題 3.2 集合 A と B を $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, m \in A$ ($m = 2$ である).
2. $\exists\, m \in A$ ($m = 2$ である).
3. $\forall\, m \in A$ ($\forall\, n \in B$ ($m = n$ である)).
4. $\exists\, m \in A$ ($\forall\, n \in B$ ($m = n$ である)).
5. $\forall\, m \in A$ ($\exists\, n \in B$ ($m = n$ である)).
6. $\exists\, m \in A$ ($\exists\, n \in B$ ($m = n$ である)).

復習問題 3.3 次の文の表す命題を述語論理式として表現せよ．数を比較するために，等号や不等号を用いてもよい．ただし，実数全体の集合は $\mathbb{R}$ で表せ．

1. すべての実数 x に対して，$x^2 \geq 0$ である．
2. すべての実数 x に対して，$x \geq 1$ ならば $\frac{1}{x} \leq 1$ である．
3. ある実数 x に対して，x^2 は非正である．
4. ある実数 x に対して，$x > 1$ ならば $x = 0$ である．

復習問題 3.4 集合 A を $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, n \in A$ (n は自然数である).
2. $\forall\, n \in A$ (n は偶数である).
3. $\exists\, n \in A$ (n は偶数である).
4. $\exists\, n \in A$ (n は自然数である).
5. $\exists\, n \in A$ (n は素数である).
6. $\exists\, n \in A$ (n は負の数である).

復習問題 3.5 集合 A を $A = \{1, 2\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, m \in A$ ($\forall\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
2. $\exists\, m \in A$ ($\forall\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
3. $\forall\, m \in A$ ($\exists\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
4. $\exists\, m \in A$ ($\exists\, n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).

補足問題 3.6 議論領域 D と命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次の論理式を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ．

1. $(\forall\, x \in D\ (P(x)) \land \forall\, x \in D\ (Q(x)))$
   $\leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P(x) \land Q(x))$.
2. $(\exists\, x \in D\ (P(x)) \lor \exists\, x \in D\ (Q(x)))$
   $\leftrightarrow \exists\, x \in D\ (P(x) \lor Q(x))$.

証明は，真理値表を用いて行ってもよいし，同値変形によって行ってもよい．

補足問題 3.7 議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して，次の論理式を考える．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ．

1. $\forall\, x \in D\ (\forall\, y \in D\ (P(x, y)))$
   $\leftrightarrow \forall\, y \in D\ (\forall\, x \in D\ (P(x, y)))$.
2. $\exists\, x \in D\ (\exists\, y \in D\ (P(x, y)))$
   $\leftrightarrow \exists\, y \in D\ (\exists\, x \in D\ (P(x, y)))$.

証明は，真理値表を用いて行ってもよいし，同値変形によって行ってもよい．

補足問題 3.8 議論領域 D と命題 P に対して，次の論理式を考える．ただし，P の中に x は自由変数として現れないものとする．このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ．

1. $P \leftrightarrow \forall\, x \in D\ (P)$.
2. $P \leftrightarrow \exists\, x \in D\ (P)$.

証明は，真理値表を用いて行ってもよいし，同値変形によって行ってもよい．

追加問題 3.9 次の文の表す命題を述語論理式として表現せよ．数を比較するために，等号や不等号を用いてもよい．ただし，自然数全体の集合は $\mathbb{N}$，実数全体の集合は $\mathbb{R}$ で表せ．

1. 任意の実数 x に対して，$x < y$ を満たす自然数 y が存在する．

2. $x^3 = 1$ を満たす任意の実数 x に対して，ある自然数 n が存在して，$x = n$ となる．（ヒント：「○○を満たす任意の実数 x に対して，…である」という文は「任意の実数 x に対して，x が○○を満たすならば…である」という意味を持つことに着目する．）

追加問題 3.10 集合 A と B を $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ と定める．このとき，以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall\, m \in A\ (\forall\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
2. $\exists\, m \in A\ (\forall\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
3. $\forall\, m \in A\ (\exists\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
4. $\exists\, m \in A\ (\exists\, n \in B\ (m < n$ である$))$.
5. $\forall\, n \in B\ (\forall\, m \in A\ (m < n$ である$))$.
6. $\exists\, n \in B\ (\forall\, m \in A\ (m < n$ である$))$.
7. $\forall\, n \in B\ (\exists\, m \in A\ (m < n$ である$))$.
8. $\exists\, n \in B\ (\exists\, m \in A\ (m < n$ である$))$.