離散数学 第 12 回
関係 (3)：順序関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 7 月 15 日

最終更新：2016 年 7 月 17 日　10:31

スケジュール 前半

- ∗ 休講 (4 月 8 日)
- 1 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 15 日)
- 2 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 22 日)
- ∗ 昭和の日 (4 月 29 日)
- 3 集合と論理 (3)：述語論理 (5 月 6 日)
- 4 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明 (5 月 13 日)
- 5 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 20 日)
- 6 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 27 日)
- 7 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 3 日)
- 中間試験 (6 月 10 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 17 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 24 日)
10. 関係 (1)：関係 (7 月 1 日)
11. 関係 (2)：同値関係 (7 月 8 日)
12. 関係 (3)：順序関係 (7 月 15 日)
13. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 22 日)
14. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 29 日)

- 期末試験 (8 月 5 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 順序関係を図示する方法を理解する
  - ハッセ図
- 順序関係に関する概念を理解する
  - 上界，極大元，最大元，上限 (最小上界)
  - 下界，極小元，最小元，下限 (最大下界)

格言

順序関係は階層性を扱うための道具

階層：ヒエラルキー

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは？

R が半順序であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 反対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} x$ ならば $x = y$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

全順序：復習

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは？

R が全順序であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は反対称性を持つ
- R は推移性を持つ
- R は完全性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 反対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} x$ ならば $x = y$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$
- 完全性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ または $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

半順序を表す記号

半順序を表すために，R ではなくて，特別な記号を使うことが多い

半順序を表す記号の例

- $\leq$
- $\preceq$
- $\leqslant$
- $\preccurlyeq$
- $\subseteq$
- $\ldots$

その否定を表す記号の例

- $\not\leq$
- $\not\preceq$
- $\not\leqslant$
- $\not\preccurlyeq$
- $\not\subseteq$
- $\ldots$

状況に応じて，使い分けられたりする
(この講義では専ら「$\preceq$」を用いていく)

半順序集合と全順序集合

半順序集合とは？

集合 A と A 上の半順序 $\preceq$ に対して
順序対 $(A, \preceq)$ を半順序集合と呼ぶ

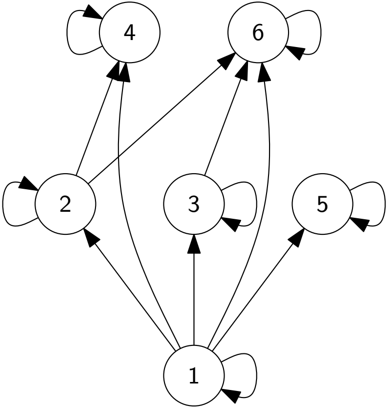
半順序集合のことをポセットと呼ぶこともある

全順序集合とは？

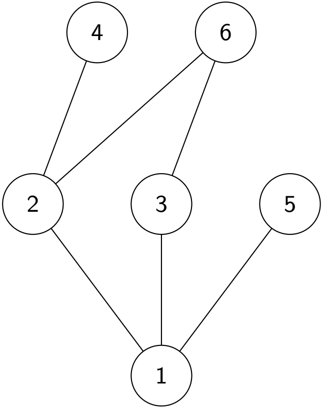
集合 A と A 上の全順序 $\preceq$ に対して
順序対 $(A, \preceq)$ を全順序集合と呼ぶ

目次

ハッセ図：とりあえず例を見てみる

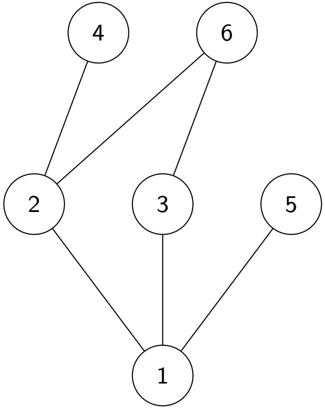


関係を表すグラフ

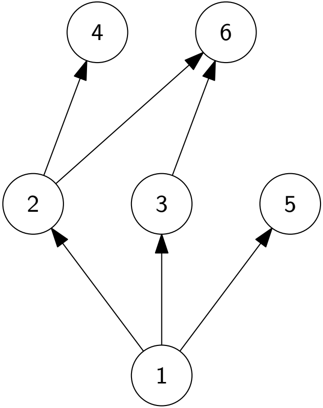


ハッセ図

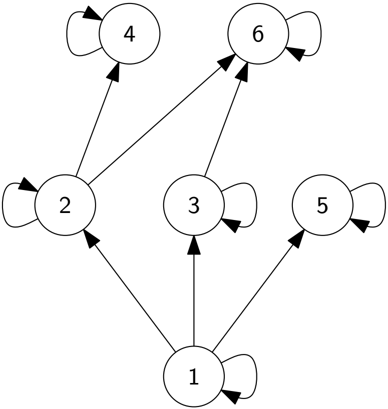
ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの



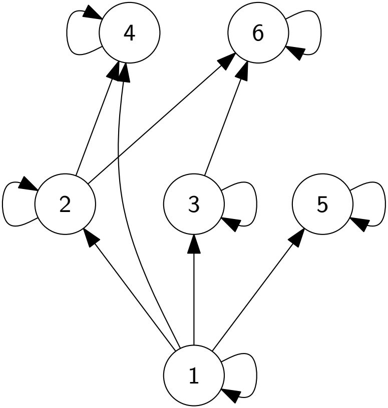
ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの



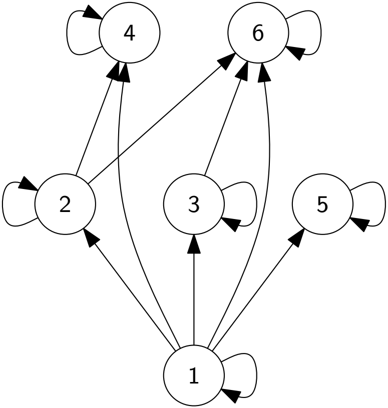
ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの



ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの



ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの

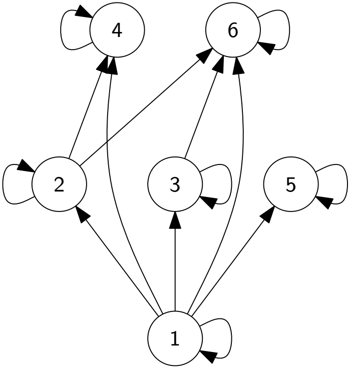


ハッセ図

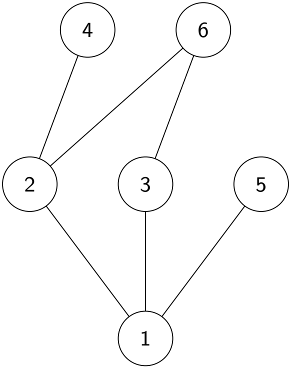
ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合 $(A, \preceq)$ のハッセ図とは，次の規則に従って描いた図

(1) A の各要素を頂点として描く



関係を表すグラフ



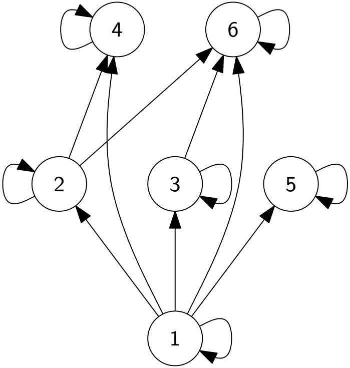
ハッセ図

ハッセ図

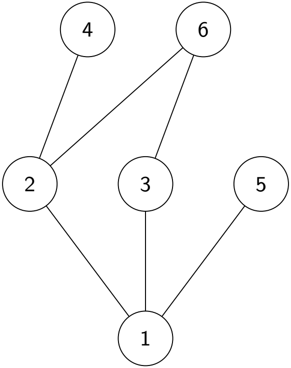
ハッセ図とは？(常識に基づく定義)

半順序集合 $(A, \preceq)$ のハッセ図とは，次の規則に従って描いた図

(2) $\preceq$ において大きい要素ほど上に描く



関係を表すグラフ



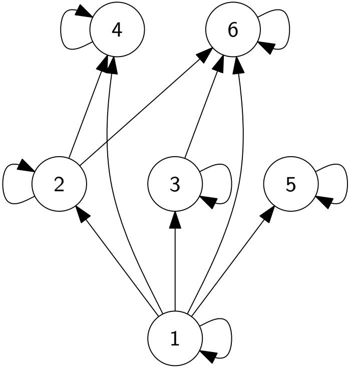
ハッセ図

ハッセ図

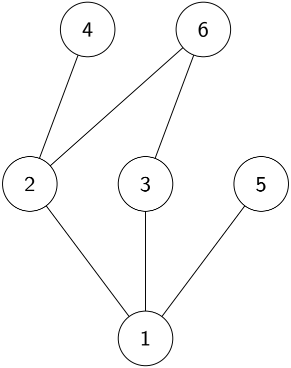
ハッセ図とは？(常識に基づく定義)

半順序集合 $(A, \preceq)$ のハッセ図とは，次の規則に従って描いた図

(3) $x \preceq y$ で，x から y へ「遠回り」がないとき，x と y を線で結ぶ



関係を表すグラフ



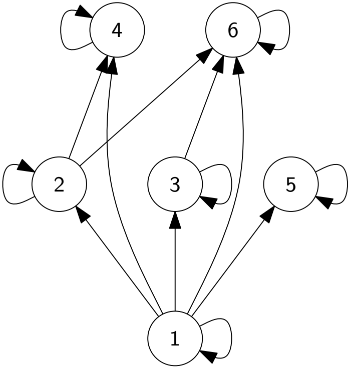
ハッセ図

ハッセ図

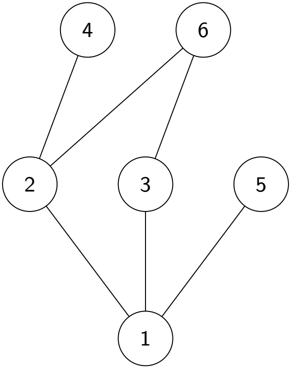
ハッセ図とは？ (常識に基づく定義)

半順序集合 $(A, \preceq)$ のハッセ図とは，次の規則に従って描いた図

(4) どの線も下から上へ単調に描かれる



関係を表すグラフ



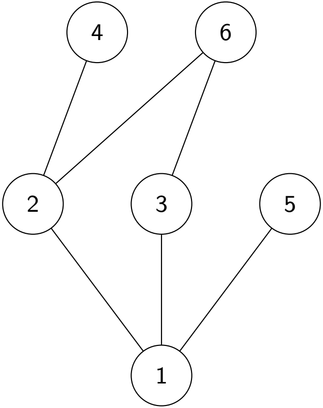
ハッセ図

比較可能性と比較不能性

半順序集合 $(A, \preceq)$

比較可能とは？

- $x, y \in A$ が比較可能であるとは
  $x \preceq y$ または $y \preceq x$ であること
- そうでないとき，x, y は比較不能



例：

- 2 と 6 は比較可能
- 1 と 4 は比較可能
- 2 と 3 は比較不能
- 4 と 6 は比較不能

格言

比較不能なものを扱える半順序思考

比較可能性と比較不能性：ハッセ図において

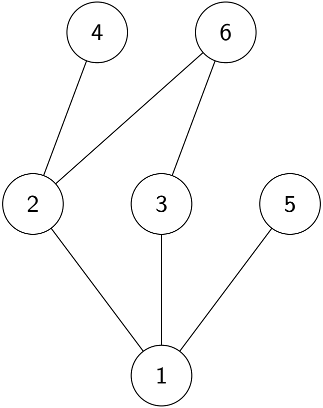
半順序集合 $(A, \preceq)$

ハッセ図で比較可能性を読み取る

- $x, y \in A$ が比較可能である $\Leftrightarrow$
  x と y を結ぶ単調な「道」が存在する
- $x, y \in A$ が比較可能でない $\Leftrightarrow$
  x と y を結ぶ単調な「道」が存在しない

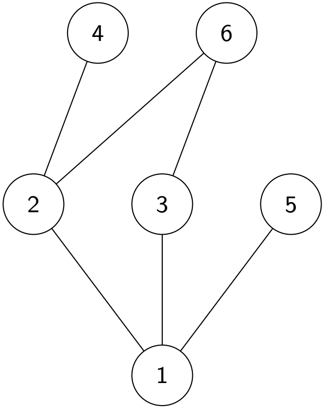
例：

- 2 と 6 は比較可能
- 1 と 4 は比較可能
- 2 と 3 は比較不能
- 4 と 6 は比較不能



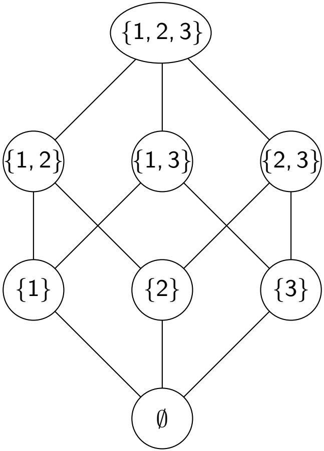
いろいろな半順序集合 (1)

$(\{1,2,3,4,5,6\}, |)$ (「$a \mid b$」とは「a は b の約数」の意味)



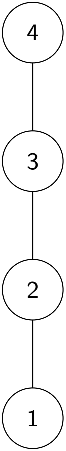
いろいろな半順序集合 (2)

$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$

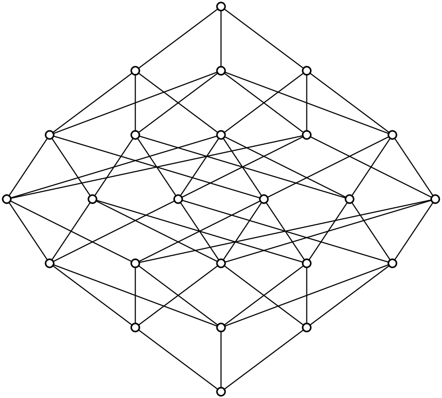


いろいろな半順序集合 (3)

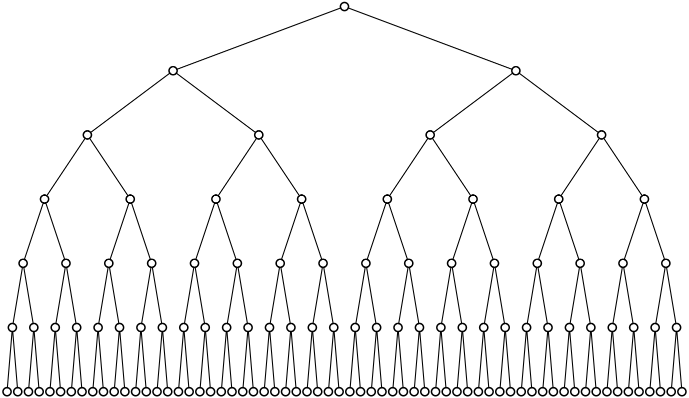
$(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$



いろいろな半順序集合 (4)

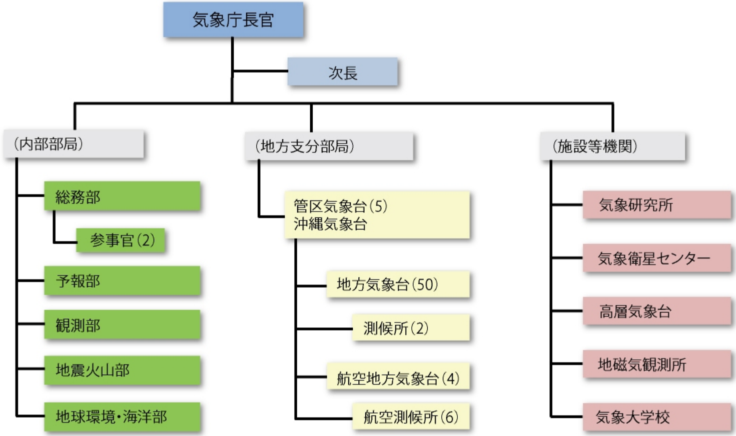


いろいろな半順序集合 (5)



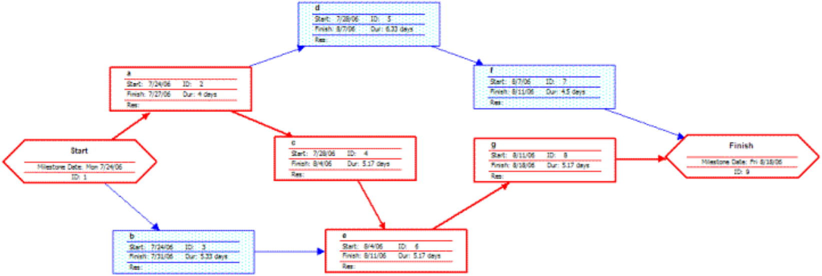
根付き木と呼ばれる (正確な定義はしない)

半順序集合の例 (1)：階層的組織



http://www.jma.go.jp/jma/kishou/intro/gyomu/index3.html

半順序集合の例 (2)：先行関係を持つジョブのスケジューリング



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pert_example_network_diagram.gif

その他の記法

半順序集合 $(A, \preceq)$ について

- 「$a \preceq b$」であることを「$b \succeq a$」とも書く
- 「$a \preceq b$ かつ $a \neq b$」であることを「$a \prec b$」と書く
- 「$a \prec b$」であることを「$b \succ a$」とも書く

注意

- 「$a \not\preceq b$」と「$a \succ b$」が同値であるとは限らない
- ただし，$\preceq$ が全順序ならば，この 2 つは同値 (演習問題)

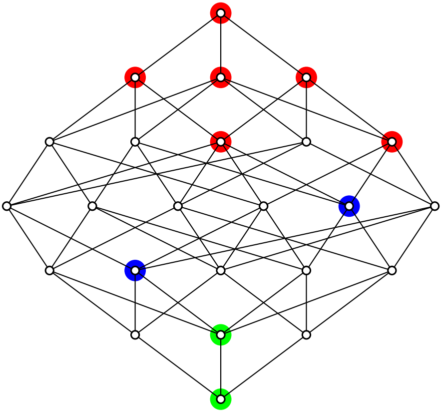
例：

- 半順序集合 $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ において，
  $\{2,3\} \not\subseteq \{1\}$ であるが，$\{2,3\} \supset \{1\}$ ではない
- 全順序集合 $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ において，
  $3 \not\leq 2$ であり，すなわち，$3 > 2$ である

目次

上界

青 と 赤 を比べると，必ず，青 $\preceq$ 赤 が成り立つ



どの 赤 も任意の 青 以上である

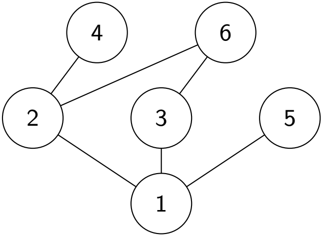
上界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- 6 は $\{2, 3\}$ の上界
  - $2 \preceq 6$ は成立，$3 \preceq 6$ は成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で，B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

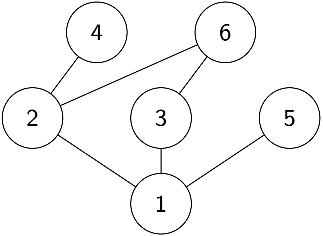
上界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- 4 は $\{2\}$ の上界
  - $2 \preceq 4$ は成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で，B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

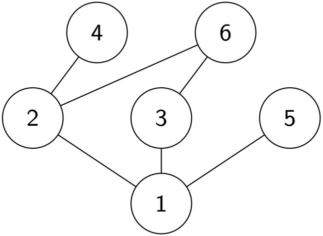
上界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- 2 は $\{2\}$ の上界
  - $2 \preceq 2$ は成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で，B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

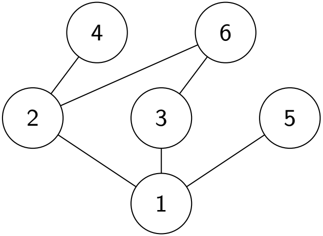
上界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

$$\text{任意の } b \in B \text{ に対して } b \preceq a$$



- $\{2, 5\}$ の上界は存在しない
  - $2 \preceq 1$ は不成立，$5 \preceq 1$ は不成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で，B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

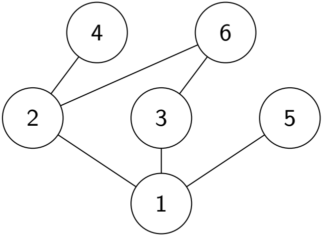
上界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上界とは？

集合 B の上界とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



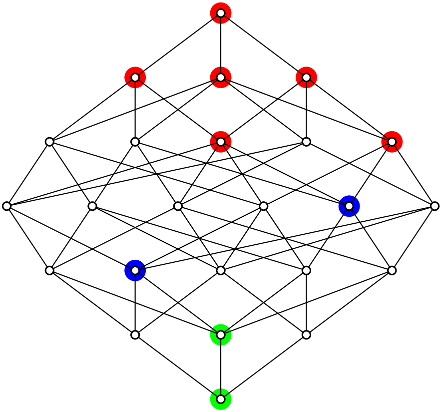
- $\{2, 5\}$ の上界は存在しない
  - $2 \preceq 1$ は不成立，$5 \preceq 1$ は不成立
  - $2 \preceq 2$ は成立，$5 \preceq 2$ は不成立
  - $2 \preceq 3$ は不成立，$5 \preceq 3$ は不成立
  - $2 \preceq 4$ は成立，$5 \preceq 4$ は不成立
  - $2 \preceq 5$ は不成立，$5 \preceq 5$ は成立
  - $2 \preceq 6$ は成立，$5 \preceq 6$ は不成立

B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で，B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

下界

$\boxed{\text{青}}$ と $\boxed{\text{緑}}$ を比べると，必ず，$\boxed{\text{緑}} \preceq \boxed{\text{青}}$ が成り立つ



どの $\boxed{\text{緑}}$ も任意の $\boxed{\text{青}}$ 以下である

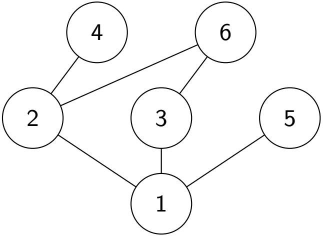
下界

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下界 (かかい) とは？

集合 B の下界とは，要素 $a \in A$ で，次を満たすもの

任意の $b \in B$ に対して $a \preceq b$

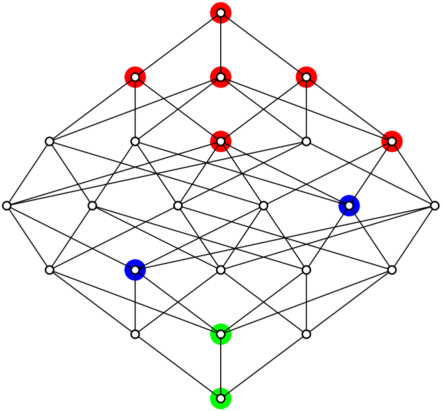


- 1 は $\{2, 3\}$ の下界
- 1 は $\{2\}$ の下界
- 2 は $\{2\}$ の下界
- 2 は $\{2, 6\}$ の下界
- 1 は $\{2, 6\}$ の下界

B の下界とは?: 直感的な説明

A の要素で，B のどの要素よりも下にある (あるいは同じ) もの

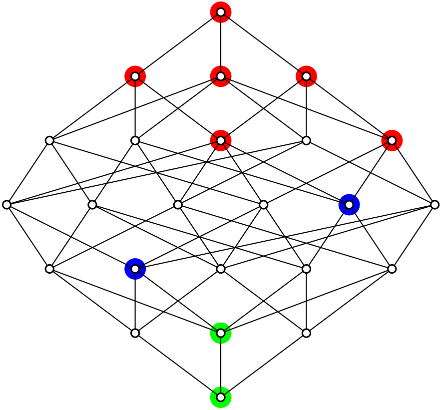
上界と下界：例



- 赤 は 青 の 2 要素から成る集合の上界
- 緑 は 青 の 2 要素から成る集合の下界

上界と下界：例

半順序が組織における序列を表すとすると…



- B の上界とは，B の共通上司　　(ただし，自分は自分の上司だとする)
- B の下界とは，B の共通部下　　(ただし，自分は自分の部下だとする)

目次

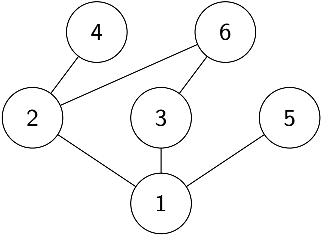
極大元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極大元 (極大要素) とは？

集合 B の極大元とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して， $b \preceq b'$ ならば $b = b'$



- 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元ではない
- 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元
- 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元

B の極大元とは?: 直感的な説明

B の要素で， B の他の要素がそれより上にないもの

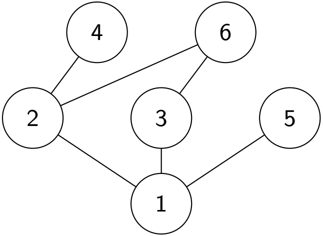
極小元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の極小元 (極小要素) とは？

集合 B の**極小元**とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$ ならば $b = b'$



- 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元ではない

B の極小元とは?: 直感的な説明

B の要素で，B の他の要素がそれより下にないもの

極大元が存在しない例

- 半順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ (注：これは全順序集合でもある)
- $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $0 < x < 1\}$
- このとき，B の極大元は存在しない

極大元が存在しない例

- 半順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ (注：これは全順序集合でもある)
- $B = (0,1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $0 < x < 1\}$
- このとき，B の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の $b \in B$ に対して，
「任意の $b' \in B$ に対して，$b \leq b'$ ならば $b = b'$」ではない

極大元が存在しない例

- 半順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$ (注：これは全順序集合でもある)
- $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $0 < x < 1\}$
- このとき，B の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の $b \in B$ に対して，
「任意の $b' \in B$ に対して，$b \leq b'$ ならば $b = b'$」ではない

証明すべきこと (書き換え)

任意の $b \in B$ に対して，
「ある $b' \in B$ に対して,『$b \preceq b'$ ならば $b = b'$』ではない」

極大元が存在しない例

- 半順序集合 $(\mathbb{R}, \leq)$　　(注：これは全順序集合でもある)
- $B = (0,1) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ かつ $0 < x < 1\}$
- このとき，B の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の $b \in B$ に対して，
「任意の $b' \in B$ に対して，$b \leq b'$ ならば $b = b'$」ではない

証明すべきこと (書き換え)

任意の $b \in B$ に対して，
「ある $b' \in B$ に対して,『$b \preceq b'$ ならば $b = b'$』ではない」

証明のために行うこと

- 任意の $b \in B$ を考える
- b を使って，$b \leq b'$ であるが，$b = b'$ とならない $b' \in B$ を見つける

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (0,1)$ を考える．

- したがって，ある $b' \in (0,1)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(0,1)$ の極大元は存在しない． $\square$

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (0, 1)$ を考える．
- $b' = \dfrac{b+1}{2}$ とする．

- したがって，ある $b' \in (0, 1)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(0, 1)$ の極大元は存在しない． $\square$

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (0,1)$ を考える．
- $b' = \dfrac{b+1}{2}$ とする．
- $b > 0$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} > \dfrac{0+1}{2} > 0$．

- したがって，ある $b' \in (0,1)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(0,1)$ の極大元は存在しない． $\square$

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (0,1)$ を考える．
- $b' = \dfrac{b+1}{2}$ とする．
- $b > 0$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} > \dfrac{0+1}{2} > 0$.
- また，$b < 1$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$.

- したがって，ある $b' \in (0,1)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(0,1)$ の極大元は存在しない． $\square$

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (0,1)$ を考える．
- $b' = \dfrac{b+1}{2}$ とする．
- $b > 0$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} > \dfrac{0+1}{2} > 0$.
- また，$b < 1$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$.
- したがって，$b' \in (0,1)$.

- したがって，ある $b' \in (0,1)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(0,1)$ の極大元は存在しない． $\square$

極大元が存在しない例：証明

- 任意の $b \in (0,1)$ を考える．
- $b' = \dfrac{b+1}{2}$ とする．
- $b > 0$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} > \dfrac{0+1}{2} > 0$.
- また，$b < 1$ なので，$b' = \dfrac{b+1}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$.
- したがって，$b' \in (0,1)$.
- $b < 1$ なので，$b = \dfrac{b+b}{2} < \dfrac{b+1}{2} = b'$.
- したがって，ある $b' \in (0,1)$ が存在して，$b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる．
- したがって，$(0,1)$ の極大元は存在しない． $\square$

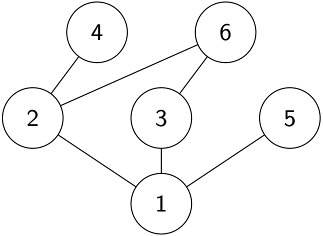
最大元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最大元 (最大要素) とは？

集合 B の**最大元**とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$



- 2 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元ではない
- 6 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元
- $\{2, 3\}$ の最大元は存在しない

B の最大元とは?: 直感的な説明

B の要素で，B の他のどの要素よりも大きいもの

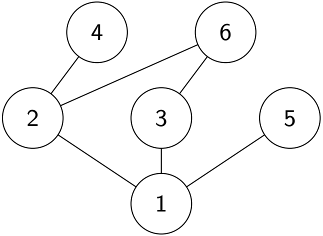
最小元

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最小元 (最小要素) とは？

集合 B の**最小元**とは，要素 $b \in B$ で，次を満たすもの

任意の $b' \in B$ に対して $b \preceq b'$



- 2 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元ではない
- 1 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元
- $\{2, 3\}$ の最小元は存在しない

B の最小元とは?: 直感的な説明

B の要素で，B の他のどの要素よりも小さいもの

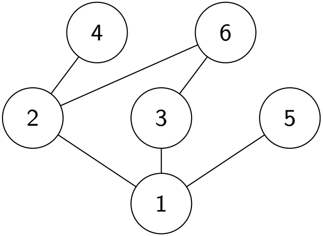
上限 (最小上界)

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上限とは？

集合 B の上限とは，B の上界 $a \in A$ で，次を満たすもの

B の任意の上界 $a' \in A$ に対して $a \preceq a'$



- 6 は $\{2, 3\}$ の上限
- 2 は $\{2\}$ の上限

B の上限とは?: 直感的な説明

B の上界で，B の他のどの上界よりも小さいもの

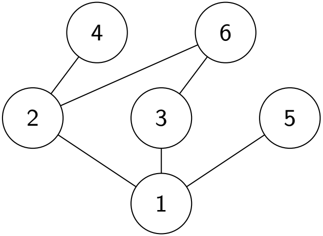
下限 (最大下界)

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下限とは？

集合 B の**下限**とは，B の下界 $a \in A$ で，次を満たすもの

B の任意の下界 $a' \in A$ に対して $a' \preceq a$



- 1 は $\{2, 3\}$ の下限
- 2 は $\{2\}$ の下限

B の下限とは?: 直感的な説明

B の下界で，B の他のどの下界よりも大きいもの

様々な性質と記法

半順序集合 $(A, \preceq)$ と A の部分集合 $B \subseteq A$

性質 (証明は演習問題)

- B の最大元は，存在するならば，ただ一つ．
- B の最大元は，存在するならば，B の極大元でもある．
- B の上限は，存在するならば，ただ一つ．

- B の最小元は，存在するならば，ただ一つ．
- B の最小元は，存在するならば，B の極小元でもある．
- B の下限は，存在するならば，ただ一つ．

記法

存在するとき，
B の最大元を $\max B$ と，B の上限を $\sup B$ と，
B の最小元を $\min B$ と，B の下限を $\inf B$ と表記することがある

極大元，極小元，最大元，最小元，上限，下限：直感？

半順序が組織における序列を表すとすると…

- B の極大元とは，B の中で，自分以外に上司がいない人
- B の最大元とは，B の中で，自分以外がすべて部下である人
- B の上限とは，B の共通上司の中で，自分以外がすべて上司である人

- B の極小元とは，B の中で，自分以外に部下がいない人
- B の最小元とは，B の中で，自分以外がすべて上司である人
- B の下限とは，B の共通部下の中で，自分以外がすべて部下である人

(ただし，自分は自分の上司，自分の部下だとする)

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 順序関係を図示する方法を理解する
  - ハッセ図
- 順序関係に関する概念を理解する
  - 上界，極大元，最大元，上限 (最小上界)
  - 下界，極小元，最小元，下限 (最大下界)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. ハッセ図
2. 上界と下界
3. その他の用語
   - 極大元，極小元
   - 最大元，最小元
   - 上限 (最小上界)，下限 (最大下界)
4. 今日のまとめ