離散数学 第 11 回
関係 (2)：同値関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 7 月 8 日

最終更新：2016 年 7 月 11 日　14:35

スケジュール 前半

- ∗ 休講 (4 月 8 日)
- 1 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 15 日)
- 2 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 22 日)
- ∗ 昭和の日 (4 月 29 日)
- 3 集合と論理 (3)：述語論理 (5 月 6 日)
- 4 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明 (5 月 13 日)
- 5 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 20 日)
- 6 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 27 日)
- 7 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 3 日)
- 中間試験 (6 月 10 日)

スケジュール 後半 (予定)

8. 写像 (1)：像と逆像 (6 月 17 日)
9. 写像 (2)：全射と単射 (6 月 24 日)
10. 関係 (1)：関係 (7 月 1 日)
11. 関係 (2)：同値関係 (7 月 8 日)
12. 関係 (3)：順序関係 (7 月 15 日)
13. 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 22 日)
14. 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 29 日)

- 期末試験 (8 月 5 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

格言

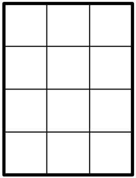
同値関係は分類のための道具

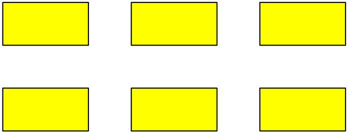
分類：クラスタリング

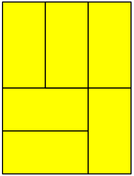
問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？

2×1 の長方形は回転させてもよい





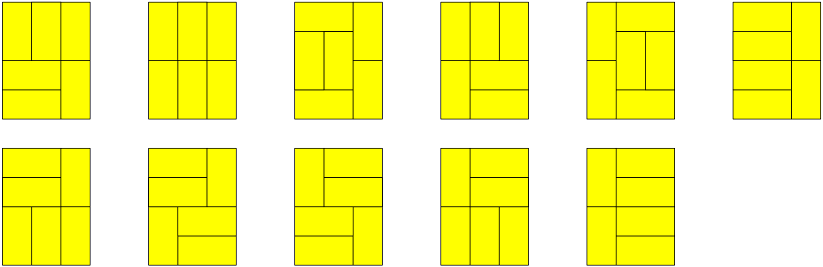


タイル張り

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？

答え：11 個

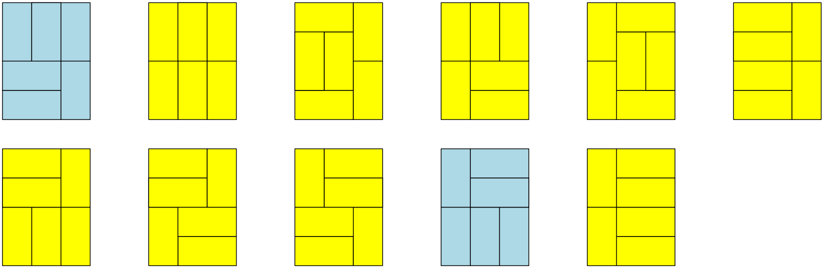


タイル張り

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？

答え：11 個



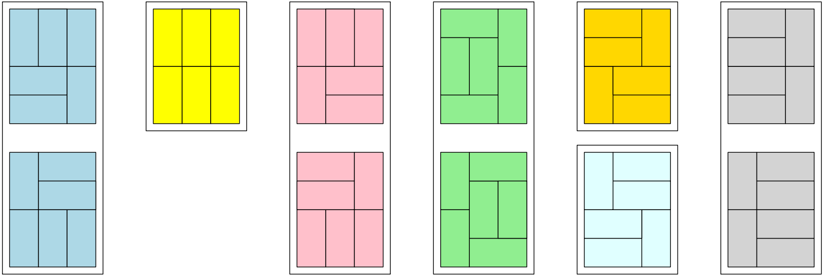
疑問

この 2 つは同じものではないのか？

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？ ただし，回転で同じになるものは同じだと見なす

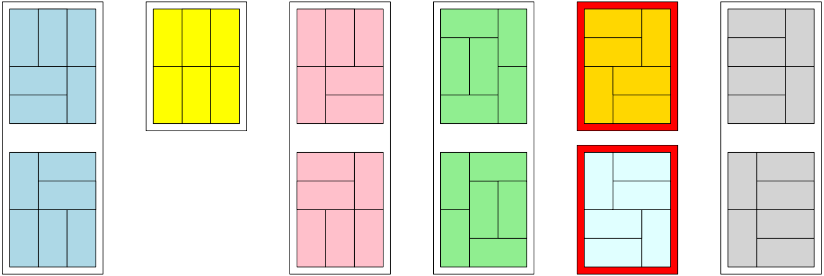
答え：7 個



問題

4 × 3 の長方形の中に 2 × 1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？ ただし，回転で同じになるものは同じだと見なす

答え：7 個



疑問

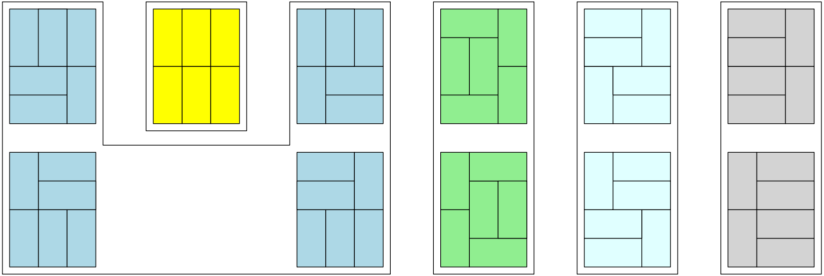
この 2 つは同じものではないのか？

タイル張り (3)

問題

4×3 の長方形の中に 2×1 の長方形を 6 個敷き詰める方法は全部で何通りあるか？ 回転や反転で同じになるものは同じだと見なす

答え：5 個



格言

同値関係は分類のための道具

同値関係

集合 A と A 上の関係 R

同値関係とは？

R が同値関係であるとは，次を満たすこと

- R は反射性を持つ
- R は対称性を持つ
- R は推移性を持つ

- 反射性：任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 対称性：任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$
- 推移性：任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

同値関係を表すために，R ではなくて，特別な記号を使うことが多い

同値関係を表す記号の例

- $=$
- $\equiv$
- $\sim$
- $\simeq$
- $\approx$
- $\ldots$

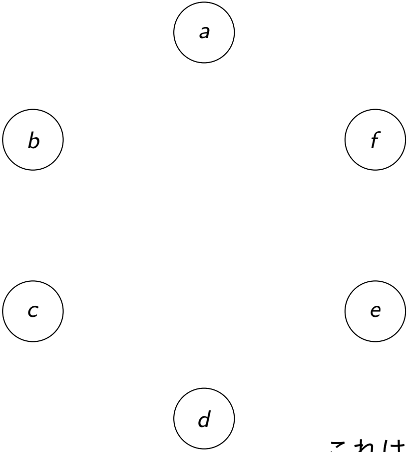
その否定を表す記号の例

- $\neq$
- $\not\equiv$
- $\not\sim$
- $\not\simeq$
- $\not\approx$
- $\ldots$

状況に応じて，使い分けられたりする

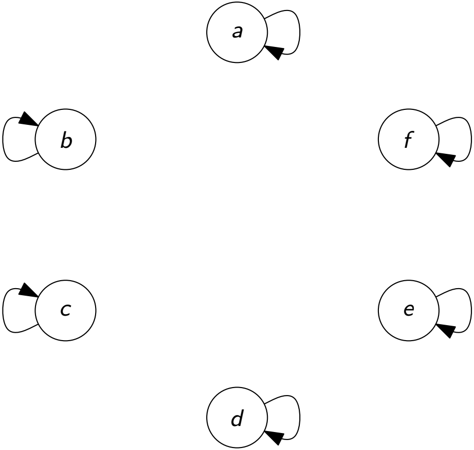
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？

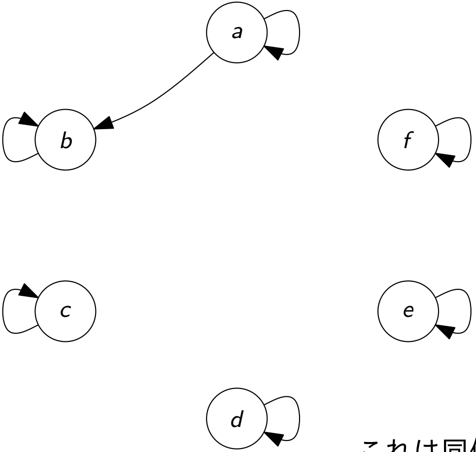


これは同値関係を表さない

これが同値関係を表すグラフだとすると？

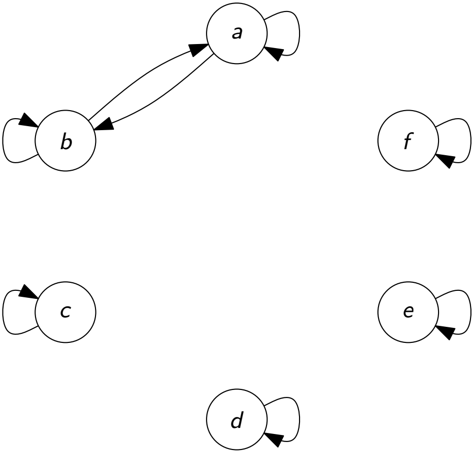


これが同値関係を表すグラフだとすると？



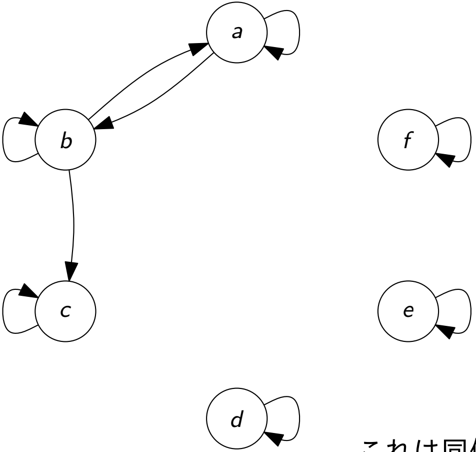
これは同値関係を表さない

これが同値関係を表すグラフだとすると？



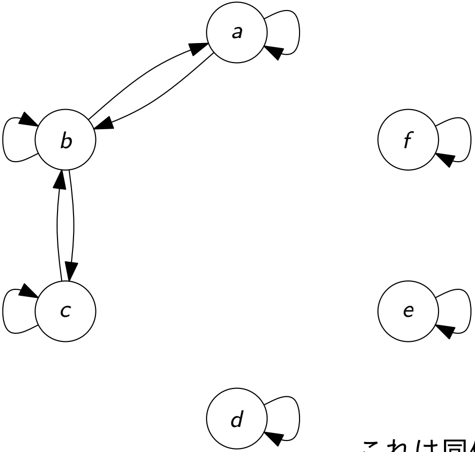
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

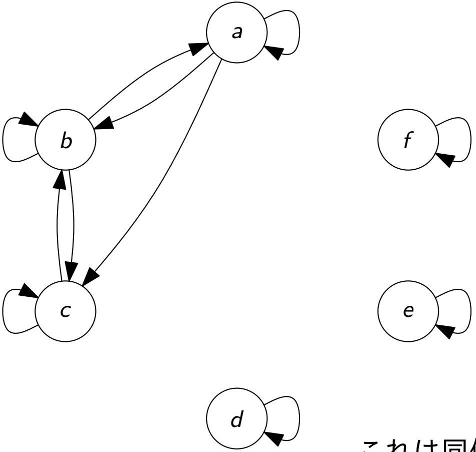
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

同値関係をグラフで描くとき...

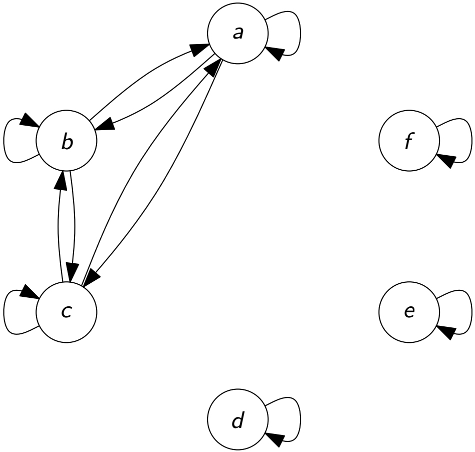
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

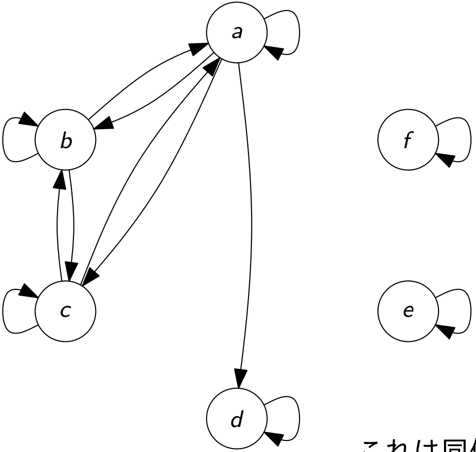
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



同値関係をグラフで描くとき...

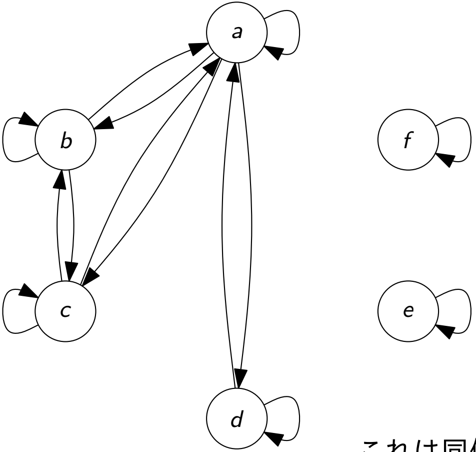
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

同値関係をグラフで描くとき...

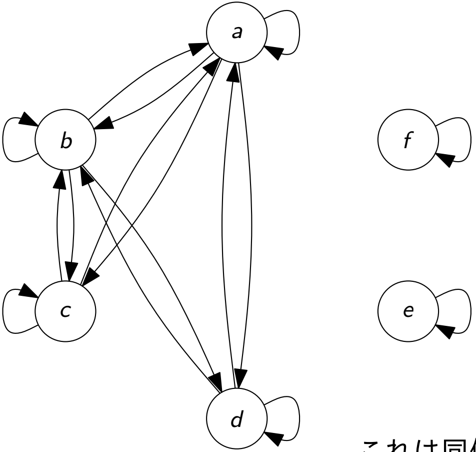
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

同値関係をグラフで描くとき...

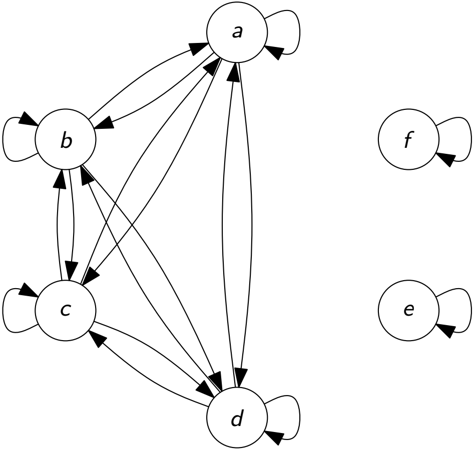
これが同値関係を表すグラフだとすると？



これは同値関係を表さない

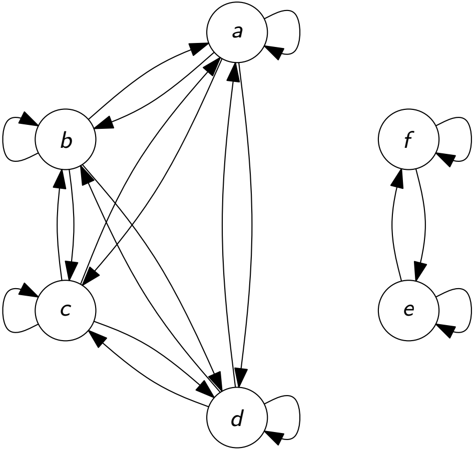
同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？

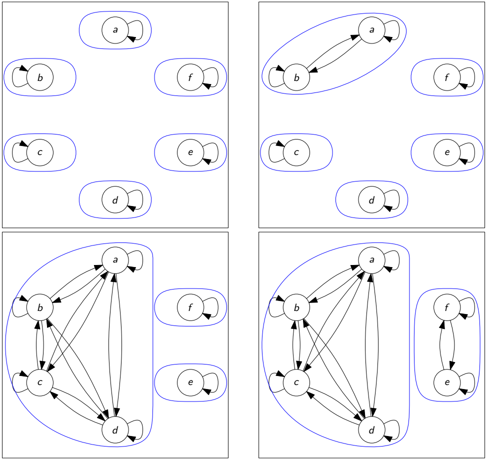


同値関係をグラフで描くとき...

これが同値関係を表すグラフだとすると？



同値関係が与える「かたまり」への分割



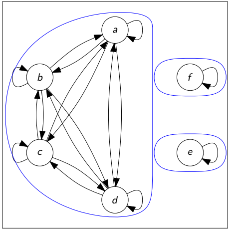
今日の目標

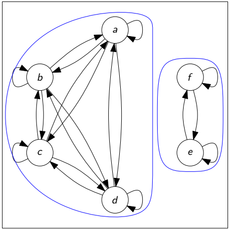
今から行うこと

次を証明する

- 「同値関係」から「『かたまり』への分割」が得られること
- 「『かたまり』への分割」から「同値関係」が得られること

つまり,「同値関係」と「分割」は同じものを別の方法で表現している





目次

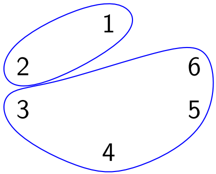
集合の分割

分割とは？

集合 A の分割とは次を満たすような集合 P のこと

- 任意の $X \in P$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$ (非空性)
- 任意の $X, Y \in P$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$ (素性)
- 任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ (被覆性)

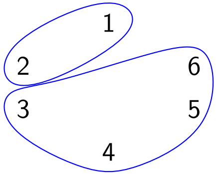
例：$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ のとき，$\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$ は A の分割



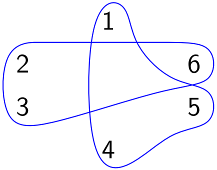
分割とは?: 例 (続き)

次の 4 つはどれも $\{1,2,3,4,5,6\}$ の分割

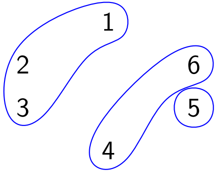
$\{\{1,2\},\{3,4,5,6\}\}$



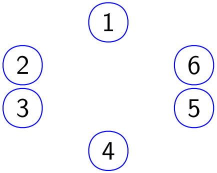
$\{\{1,4,5\},\{2,3,6\}\}$



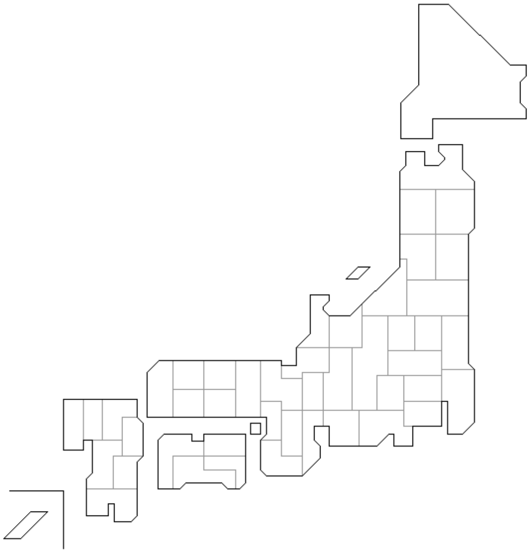
$\{\{1,2,3\},\{4,6\},\{5\}\}$



$\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}\}$

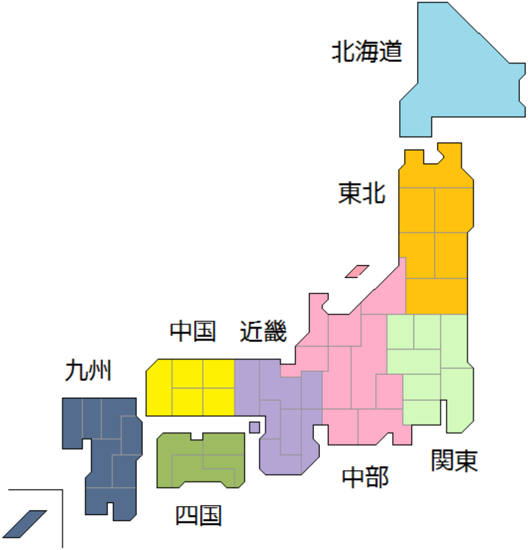


分割の例 1：日本の八地方区分



http://www.craftmap.box-i.net/

分割の例 1：日本の八地方区分



http://www.craftmap.box-i.net/

分割の例 2：カレンダー

1ヵ月の 31 日をいろいろな方法で分割している

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

- 1 日 1 日で分割 (31 個の集合へ分割)
  - $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\},\{7\},\ldots,\{31\}\}$
- 週ごとに分割 (5 個の集合へ分割)
  - $\{\{1,2,3,4,5,6,7\},\{8,9,10,11,12,13,14\},\ldots\}$
- 曜日ごとに分割 (7 個の集合へ分割)
  - $\{\{1,8,15,22,29\},\{2,9,16,23,30\},\ldots\}$
- …

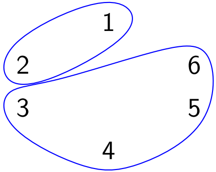
目次

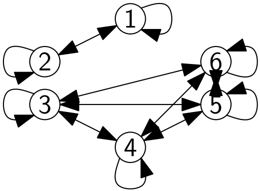
分割から同値関係へ

集合 A の分割 P を考える

分割から同値関係へ

- A 上の関係 R を，任意の $x, y \in A$ に対して $x \mathrm{R} y$ であることを
  ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$ である
  こととして定義する
- このとき，R は A 上の同値関係である





分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$． $\square$

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

- P は A の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$．
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$． □

分割から同値関係へ：証明 (反射性)

証明すべきこと (1)：反射性

任意の $x \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

- P は A の分割なので，分割の被覆性から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$．
- したがって，ある $X \in P$ が存在して $x \in X$ かつ $x \in X$．
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$． $\square$

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意の $x, y \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$． □

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意の $x, y \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$. □

分割から同値関係へ：証明 (対称性)

証明すべきこと (2)：対称性

任意の $x, y \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ ならば $y \mathrel{\mathrm{R}} x$

定義に立ち戻って書きなおす

任意の $x, y \in A$ に対して，
「ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$」ならば
「ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$」

証明：任意の $x, y \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- すなわち，ある $X \in P$ が存在して，$y \in X$ かつ $x \in X$.
- したがって，$y \mathrel{\mathrm{R}} x$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ ならば $x \mathrel{R} z$

証明：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{R} y$ かつ $y \mathrel{R} z$ と仮定する．

- したがって，$x \mathrel{R} z$． □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$．
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$． $\square$

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.

- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

<u>証明</u>：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.
- 分割の素性から，$X = X'$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

分割から同値関係へ：証明 (推移性)

証明すべきこと (3)：推移性

任意の $x, y, z \in A$ に対して，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ ならば $x \mathrel{\mathrm{R}} z$

証明：任意の $x, y, z \in A$ を考え，$x \mathrel{\mathrm{R}} y$ かつ $y \mathrel{\mathrm{R}} z$ と仮定する．

- R の定義から，ある $X \in P$ が存在して，$x \in X$ かつ $y \in X$.
- 同様に，ある $X' \in P$ が存在して，$y \in X'$ かつ $z \in X'$.
- $y \in X$ と $y \in X'$ から，$y \in X \cap X'$.
- 特に，$X \cap X' \neq \emptyset$.
- 分割の素性から，$X = X'$.
- したがって，$x \in X$ かつ $z \in X$.
- したがって，$x \mathrel{\mathrm{R}} z$. □

目次

同値類

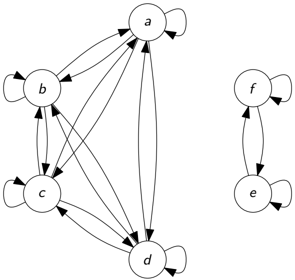
集合 A 上の同値関係 R を考える

同値類とは？

同値関係 R における要素 $a \in A$ の同値類とは

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } a \mathrel{\mathrm{R}} x\}$$

という集合のことであり，これを $[a]_{\mathrm{R}}$ とも書く



- $[a]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[b]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[c]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[d]_{\mathrm{R}} = \{a, b, c, d\}$
- $[e]_{\mathrm{R}} = \{e, f\}$
- $[f]_{\mathrm{R}} = \{e, f\}$

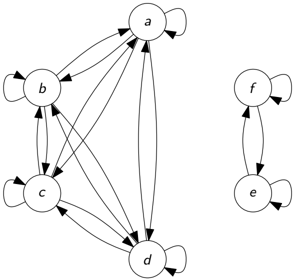
商集合

商集合とは？

集合 A 上の同値関係 R に対して，

$$A \,/\, \mathrm{R} = \{[a]_{\mathrm{R}} \mid a \in A\}$$

を R に関する A の**商集合**と呼ぶ．



$$\begin{aligned} A \,/\, \mathrm{R} &= \{[a]_{\mathrm{R}}, [b]_{\mathrm{R}}, [c]_{\mathrm{R}}, [d]_{\mathrm{R}}, [e]_{\mathrm{R}}, [f]_{\mathrm{R}}\} \\ &= \{\{a, b, c, d\}, \{e, f\}\} \end{aligned}$$

注意

商集合 $A \,/\, \mathrm{R}$ を $\dfrac{A}{\mathrm{R}}$ とは**書かない**

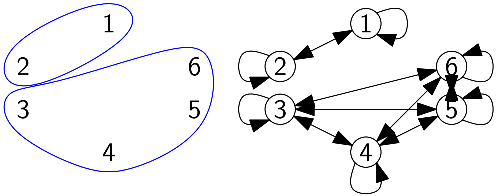
同値関係から分割へ

集合 A 上の同値関係 R を考える

同値関係から分割へ

商集合 A / R は A の分割である

これゆえ，R に関する A の商集合のことを，
R に関する A の**同値分割**とも呼ぶ



同値関係から分割へ：証明への道筋

分割の定義に立ち戻って書き換える

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

この 3 つが証明できれば，$A \,/\, \mathrm{R}$ が A の分割であることが言える

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- したがって，$X \subseteq A$.
- したがって，$X \neq \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$．
- したがって，$X \subseteq A$．
- したがって，$X \neq \emptyset$．

□

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$．
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$．
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．
- したがって，$[a]_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． $\square$

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意の $X \in A / \mathrm{R}$ を考える．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_\mathrm{R}$．
- 同値類の定義から，$[a]_\mathrm{R} \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．
- 同値関係の反射性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a$．
- したがって，$[a]_\mathrm{R} \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． □

同値関係から分割へ：証明 (非空性)

証明すべきこと (1)：非空性

任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \subseteq A$ かつ $X \neq \emptyset$

証明：任意の $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$．
- 同値類の定義から，$[a]_{\mathrm{R}} \subseteq A$．
- したがって，$X \subseteq A$．

- 同値関係の反射性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a$．
- 同値類の定義から，$a \in [a]_{\mathrm{R}}$．
- したがって，$[a]_{\mathrm{R}} \neq \emptyset$．
- したがって，$X \neq \emptyset$． $\square$

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

<u>証明</u>：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える.

- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

<u>証明</u>：任意の $X, Y \in A / \mathrm{R}$ を考える.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $x \in A$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in Y$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A / \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A / \mathrm{R}$ を考える．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $x \in A$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in Y$.
- すなわち，$x \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $x \in [a']_{\mathrm{R}}$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $x \in A$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in Y$.
- すなわち，$x \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $x \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a \,\mathrm{R}\, x$ かつ $a' \,\mathrm{R}\, x$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $x \in A$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in Y$.
- すなわち，$x \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $x \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a \,\mathrm{R}\, x$ かつ $a' \,\mathrm{R}\, x$.
- $a' \,\mathrm{R}\, x$ と同値関係の対称性から，$x \,\mathrm{R}\, a'$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える．

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する． .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $x \in A$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in Y$.
- すなわち，$x \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $x \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a \,\mathrm{R}\, x$ かつ $a' \,\mathrm{R}\, x$.
- $a' \,\mathrm{R}\, x$ と同値関係の対称性から，$x \,\mathrm{R}\, a'$.
- $a \,\mathrm{R}\, x$，$x \,\mathrm{R}\, a'$ と同値関係の推移性から，$a \,\mathrm{R}\, a'$.

- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (素性)

証明すべきこと (2)：素性

任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ に対して，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$.

証明：任意の $X, Y \in A \,/\, \mathrm{R}$ を考える.

- 対偶を証明するために，$X \cap Y \neq \emptyset$ を仮定する. .... (1)
- 商集合の定義から，ある $a \in A$ が存在して，$X = [a]_{\mathrm{R}}$.
- 同様に，ある $a' \in A$ が存在して，$Y = [a']_{\mathrm{R}}$.
- 仮定 (1) より，ある $x \in A$ が存在して，$x \in X$ かつ $x \in Y$.
- すなわち，$x \in [a]_{\mathrm{R}}$ かつ $x \in [a']_{\mathrm{R}}$.
- 同値類の定義から，$a \mathrel{\mathrm{R}} x$ かつ $a' \mathrel{\mathrm{R}} x$.
- $a' \mathrel{\mathrm{R}} x$ と同値関係の対称性から，$x \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} x$，$x \mathrel{\mathrm{R}} a'$ と同値関係の推移性から，$a \mathrel{\mathrm{R}} a'$.
- $a \mathrel{\mathrm{R}} a'$ から，$[a]_{\mathrm{R}} = [a']_{\mathrm{R}}$. (演習問題)
- したがって，$X = Y$.
- したがって，$X \neq Y$ ならば $X \cap Y = \emptyset$. □

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A / \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A / \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする．

- したがって，$x \in X$． $\square$

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A / \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする．
- 反射性から，$x \mathrel{\mathrm{R}} x$．
- したがって，$x \in X$． $\square$

同値関係から分割へ：証明 (被覆性)

証明すべきこと (3)：被覆性

任意の $x \in A$ に対して，ある $X \in A \,/\, \mathrm{R}$ が存在して，$x \in X$

証明：任意の $x \in A$ を考える．

- $X = [x]_{\mathrm{R}}$ とする．
- 反射性から，$x \,\mathrm{R}\, x$．
- 同値類の定義から，$x \in [x]_{\mathrm{R}}$．
- したがって，$x \in X$． $\square$

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 同値関係と分割の関係を理解する
  - 分割とは？
  - 分割から同値関係へ
  - 同値関係から分割へ
    - 同値分割と商集合

格言

本質的に同一であるものが，異なる表現を持つことはよくある

同値関係	分割
局所的 (local)	大域的 (global)
微視的 (micro)	巨視的 (macro)

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次