

離散数学 第 4 回
証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 5 月 13 日

最終更新 : 2016 年 5 月 9 日 05:10

1 学期間の概要 (再掲)

主題

- ▶ 理工学のあらゆる分野に現れる**数学の言葉と論理**を徹底的に身につける
- ▶ これによって、論理的な思考を行う基礎能力を体得し、将来的に、専門書を読み解き、自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- ▶ キャッチフレーズは「**語学としての数学**」

達成目標

以下の2項目をすべて達成することを目標とする。

- 1 数学における基本的な用語 (集合, 論理, 写像, 関係) を正しく使うことができる
- 2 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

今日の目標

- ▶ 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ▶ \exists や \forall を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
- ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- ▶ 命題論理式：できる
- ▶ 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- ▶ 命題論理式：できるかもしれない
- ▶ 述語論理式：できるかもしれない

しかし、とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには、
述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

述語論理における重要な恒真式 (1) : 復習

 \forall の否定, \exists の否定 (重要!) — ド・モルガンの法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して, 次が成り立つ

$$\neg(\forall x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x))$$

$$\neg(\exists x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D (\neg P(x))$$

 \forall の分配法則, \exists の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して, 次が成り立つ

$$(\forall x \in D (P(x))) \wedge (\forall x \in D (Q(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x \in D (P(x))) \vee (\exists x \in D (Q(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \vee Q(x))$$

交換法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (\forall y \in D (P(x, y))) \Leftrightarrow \forall y \in D (\forall x \in D (P(x, y)))$$

$$\exists x \in D (\exists y \in D (P(x, y))) \Leftrightarrow \exists y \in D (\exists x \in D (P(x, y)))$$

述語論理における重要な恒真式 (2) : 復習

 \forall の導入, \exists の導入

任意の議論領域 D と命題 P に対して, 次が成り立つ

$$P \Leftrightarrow \forall x \in D (P)$$

$$P \Leftrightarrow \exists x \in D (P)$$

注 : P の中に x は自由変数として現れない

 \forall の分配法則, \exists の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$, 命題 Q に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \vee Q)$$

$$\exists x \in D (P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \wedge Q)$$

注 : Q の中に x は自由変数として現れない

述語論理における重要な恒真式 (3) : 復習

束縛変数の変更

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して, 次が成り立つ

$$\forall x \in D (P(x)) \Leftrightarrow \forall y \in D (P(y))$$

$$\exists x \in D (P(x)) \Leftrightarrow \exists y \in D (P(y))$$

注 : $P(x)$ の中に y は自由変数として現れず,
 $P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)))$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) \quad (\text{実質含意})$$

実質含意

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) && (\forall \text{ の否定}) \end{aligned}$$

\forall の否定

$$\neg(\forall x (P(x))) \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) && (\forall \text{の否定}) \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \end{aligned}$$

ド・モルガンの法則

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) && (\forall \text{ の否定}) \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(二重否定の除去)} \end{aligned}$$

二重否定の除去

$$\neg\neg P \Leftrightarrow P$$

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して

$$\neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned} \neg(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x (\neg P(x) \vee Q(x))) && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) && (\forall \text{の否定}) \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{(二重否定の除去)} \end{aligned}$$

□

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q \quad (\text{実質含意})$$

実質含意

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q \quad (\text{実質含意})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q \quad (\forall \text{ の否定})$$

\forall の否定

$$\neg \forall x (P(x)) \Leftrightarrow \exists x (\neg P(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q \quad (\text{実質含意})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q \quad (\forall \text{ の否定})$$

$$\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee \exists x (Q) \quad (\exists \text{ の導入})$$

\exists の導入

$$P \Leftrightarrow \exists x (P)$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\begin{aligned} \forall x (P(x)) \rightarrow Q &\Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q && \text{(\forall の否定)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee \exists x (Q) && \text{(\exists の導入)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q) && \text{(\exists の分配法則)} \end{aligned}$$

 \exists の分配法則

$$\exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \vee Q(x))$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\begin{aligned} \forall x (P(x)) \rightarrow Q &\Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q && \text{(\forall の否定)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee \exists x (Q) && \text{(\exists の導入)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q) && \text{(\exists の分配法則)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q) && \text{(実質含意)} \end{aligned}$$

実質含意

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して

$$\forall x (P(x)) \rightarrow Q \Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q)$$

$$\begin{aligned} \forall x (P(x)) \rightarrow Q &\Leftrightarrow \neg(\forall x (P(x))) \vee Q && \text{(実質含意)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee Q && \text{(\forall の否定)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x)) \vee \exists x (Q) && \text{(\exists の導入)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (\neg P(x) \vee Q) && \text{(\exists の分配法則)} \\ &\Leftrightarrow \exists x (P(x) \rightarrow Q) && \text{(実質含意)} \end{aligned}$$



目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

- ▶ 記号を使って書くと、集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ に対して

$$\exists x \in A (x \text{ は素数である})$$

- ▶ A が有限集合なので、
前回のよう、 \forall を用いて書き直すことで証明できるが、
ここでは (練習のため) 違う方法で証明する

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

ある数が素数であることとは何なのか？ 定義を思い出す

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

ある数が素数であることとは何なのか？ 定義を思い出す

素数とは？：素数の定義

自然数 n が素数であるとは、
それが 1 と n 以外の自然数で割り切れないこと

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える。

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える。

- ▶ 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので、3 は素数である。

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える。

- ▶ 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので、3 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える。

- ▶ 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので、3 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

「～が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：

「～が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる（証明する）．

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える。

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える。

- ▶ 7 は 1 と 7 以外の自然数で割り切れないので、7 は素数である。

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる（証明する）。

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える。

- ▶ 7 は 1 と 7 以外の自然数で割り切れないので、7 は素数である。
- ▶ したがって、 A には素数が存在する。 □

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する、といっているものを 1 つ見つけ、「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる（証明する）．

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる（証明する）．

要求されている性質

- ▶ 自然数である
- ▶ 3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 である

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える.

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える。

- ▶ 17 を 3 で割ると， $17 = 5 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である。

「～が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える。

- ▶ 17 を 3 で割ると， $17 = 5 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である。
- ▶ 17 を 7 で割ると， $17 = 2 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である。

「～が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える。

- ▶ 17 を 3 で割ると， $17 = 5 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である。
- ▶ 17 を 7 で割ると， $17 = 2 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である。
- ▶ したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。□

「～が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える。

- ▶ 17 を 3 で割ると， $17 = 5 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である。
- ▶ 17 を 7 で割ると， $17 = 2 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である。
- ▶ したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。 □

疑問点

「17」はどのようにして見つかったのか？

「～が存在する」という命題の証明法：下書きと清書

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し，証明として書くものは清書のみ

下書き

- ▶ 「17」やそれに代わるものを見つける過程を書く
- ▶ 確かに，それが要求されている性質を満たすことを確かめる

清書

- ▶ 前のページのように，まとまった証明を書く

「～が存在する」という命題の証明法：下書きと清書

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し、証明として書くものは清書のみ

下書き

- ▶ 「17」やそれに代わるものを見つける過程を書く
- ▶ 確かに、それが要求されている性質を満たすことを確かめる

清書

- ▶ 前のページのように、まとまった証明を書く

どうしてそうするのか？

- ▶ 「3で割ると余りが2であり、7で割ると余りが3であるような自然数が存在する」ことが正しいのかどうか、ということだけが読者の興味の対象
- ▶ 証明では、それが確認できさえすればよい

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3で割ると余りが2となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを7で割った余りが3となればよい

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3 で割ると余りが 2 となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを 7 で割った余りが 3 となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7 で割った余りは 2

「～が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3で割ると余りが2となる自然数」は $3k + 2$ と書ける
(ただし, k は非負整数)
- ▶ これを7で割った余りが3となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7で割った余りは2
- ▶ $k = 1$ のとき, $3k + 2 = 5$ で, 7で割った余りは5

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3で割ると余りが2となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを7で割った余りが3となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7で割った余りは2
- ▶ $k = 1$ のとき, $3k + 2 = 5$ で, 7で割った余りは5
- ▶ $k = 2$ のとき, $3k + 2 = 8$ で, 7で割った余りは1

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3で割ると余りが2となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを7で割った余りが3となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7で割った余りは2
- ▶ $k = 1$ のとき, $3k + 2 = 5$ で, 7で割った余りは5
- ▶ $k = 2$ のとき, $3k + 2 = 8$ で, 7で割った余りは1
- ▶ $k = 3$ のとき, $3k + 2 = 11$ で, 7で割った余りは4

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3で割ると余りが2となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを7で割った余りが3となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7で割った余りは2
- ▶ $k = 1$ のとき, $3k + 2 = 5$ で, 7で割った余りは5
- ▶ $k = 2$ のとき, $3k + 2 = 8$ で, 7で割った余りは1
- ▶ $k = 3$ のとき, $3k + 2 = 11$ で, 7で割った余りは4
- ▶ $k = 4$ のとき, $3k + 2 = 14$ で, 7で割った余りは0

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3で割ると余りが2となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを7で割った余りが3となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7で割った余りは2
- ▶ $k = 1$ のとき, $3k + 2 = 5$ で, 7で割った余りは5
- ▶ $k = 2$ のとき, $3k + 2 = 8$ で, 7で割った余りは1
- ▶ $k = 3$ のとき, $3k + 2 = 11$ で, 7で割った余りは4
- ▶ $k = 4$ のとき, $3k + 2 = 14$ で, 7で割った余りは0
- ▶ $k = 5$ のとき, $3k + 2 = 17$ で, 7で割った余りは3

「～が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- ▶ 「3 で割ると余りが 2 となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし, k は非負整数)
- ▶ これを 7 で割った余りが 3 となればよい
- ▶ $k = 0$ のとき, $3k + 2 = 2$ で, 7 で割った余りは 2
- ▶ $k = 1$ のとき, $3k + 2 = 5$ で, 7 で割った余りは 5
- ▶ $k = 2$ のとき, $3k + 2 = 8$ で, 7 で割った余りは 1
- ▶ $k = 3$ のとき, $3k + 2 = 11$ で, 7 で割った余りは 4
- ▶ $k = 4$ のとき, $3k + 2 = 14$ で, 7 で割った余りは 0
- ▶ $k = 5$ のとき, $3k + 2 = 17$ で, 7 で割った余りは 3

ということなので, 17 を考えればよい

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える．

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える．

- ▶ 80 を 3 で割ると， $80 = 26 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える．

- ▶ 80 を 3 で割ると， $80 = 26 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．
- ▶ 80 を 7 で割ると， $80 = 11 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である．

「～が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える．

- ▶ 80 を 3 で割ると， $80 = 26 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．
- ▶ 80 を 7 で割ると， $80 = 11 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である．
- ▶ したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する。 □

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる（証明する）．

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する「 \sim が存在する」という命題の証明法

- 1 存在する，といているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる（証明する）．

 x に要求されている性質

- ▶ x は実数である
- ▶ $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす

例題 3 : 下書き

- ▶ 条件「 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

例題 3 : 下書き

- ▶ 条件「 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- ▶ よって、 $(x - 2)(x - 3) < 0$ となるような x を考えたい

例題 3 : 下書き

- ▶ 条件「 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- ▶ よって、 $(x - 2)(x - 3) < 0$ となるような x を考えたい
- ▶ 「 $(x - 2)(x - 3) < 0$ 」は「 $2 < x < 3$ 」と同値

例題 3 : 下書き

- ▶ 条件「 $x^2 - 5x + 6 < 0$ 」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- ▶ よって、 $(x - 2)(x - 3) < 0$ となるような x を考えたい
- ▶ 「 $(x - 2)(x - 3) < 0$ 」は「 $2 < x < 3$ 」と同値
- ▶ なので、2 よりも大きく、3 よりも小さい実数を考えればよい

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する証明：

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6$$

「～が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4}$$

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4}$$

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

「 \sim が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

▶ したがって、 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x は存在する。 □

「～が存在する」という命題の証明法：例題3

例題3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える。

▶ このとき、

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

▶ したがって、 $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x は存在する。 □

今一度強調

- ▶ 選んだものは書く必要がある (この場合は, $\frac{5}{2}$)
- ▶ $\frac{5}{2}$ がどのように出てきたのかは書く必要がない

嘉田 勝「証明を理解するための考え方」を参照

(数学セミナー 2009年5月号, <http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kada/susemi0905/>)

目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall x (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章。読者に伝わるように書く

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である証明：任意の実数 x を考える

- ▶ (ここに「 $x^2 + 1 \geq 2x$ 」であることの証明を書く)
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x$
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2$
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である証明：任意の実数 x を考える

- ▶ 左辺 - 右辺 = $x^2 + 1 - 2x = (x - 1)^2 \geq 0$.
- ▶ したがって、 $x^2 + 1 \geq 2x$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の～に対して…である」という命題の証明法

- 1 「任意の～を考える」で始め、「したがって、…である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ (ここに「 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である」ことの証明を書く)
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3$

▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3) + (1-3x+3x^2-x^3)$
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

「任意の～に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である証明：任意の実数 x を考える。

- ▶ $(1+x)^3 + (1-x)^3 = (1+3x+3x^2+x^3) + (1-3x+3x^2-x^3)$
 $= 6x^2 + 2.$
- ▶ したがって、 $(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である。 □

目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

「任意の \sim に対して \dots である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- ▶ その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は

- ▶ 先ほどのように証明する

正しくない場合は

- ▶ その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

 \forall の否定 (重要!) — ド・モルガンの法則

$$\neg(\forall x \in D (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D (\neg P(x))$$

上の命題の否定

ある異なる素数 a, b が存在して， $a + b$ は 2 で割り切れない反例： $a + b$ が 2 で割り切れないような，異なる素数 a, b

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

▶ (ここにこの命題の否定の証明を書く)

▶



「任意の \sim に対して \dots である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか、正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して、 $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

▶ 異なる素数 $a = 2, b = 3$ を考える。

▶



「任意の \sim に対して \dots である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して， $a + b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 異なる素数 $a = 2, b = 3$ を考える。
- ▶ このとき， $a + b = 2 + 3 = 5$ であり，これは 2 で割り切れない。 □

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

注意

正しいか正しくないかの見通しは，下書きに書く

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

上の命題の否定

ある実数 x に対して， $x^2 > 0$ ではない

反例： $x^2 > 0$ ではないような実数 x

注意

正しいか正しくないかの見通しは，下書きに書く

「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．

▶ (ここにこの命題の否定の証明を書く)

▶



「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

▶ 実数 $x = 0$ を考える。

▶



「任意の～に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して， $x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない。その理由は以下の通りである。

- ▶ 実数 $x = 0$ を考える。
- ▶ このとき， $x^2 = 0$ であり， $x^2 > 0$ にはならない。



目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ▶ \exists や \forall を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- ▶ 証明は論理的思考の根幹 \rightsquigarrow 論理的思考の訓練
- ▶ 証明は文章 (主張) \rightsquigarrow 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して、文章を論理的に読み書きできるようになる

残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ←重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK

目次

- ① 述語論理における重要な恒真式 (復習)
- ② 同値変形による恒真性の証明
- ③ $\exists x (P(x))$ の証明
- ④ $\forall x (P(x))$ の証明
- ⑤ $\neg \forall x (P(x))$ の証明
- ⑥ 今日のまとめ