

離散数学 第12回
関係 (3) : 順序関係

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016年7月15日

最終更新 : 2016年7月17日 10:31

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1) : 像と逆像 (6月17日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (6月24日)
- 10 関係 (1) : 関係 (7月1日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (7月8日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (7月15日)
- 13 証明法 (4) : 数学的帰納法 (7月22日)
- 14 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (7月29日)
- 期末試験 (8月5日?)

注意 : 予定の変更もありうる

(半) 順序 : 復習

集合 A と A 上の関係 R

半順序とは?

R が半順序であるとは、次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
 - ▶ R は反対称性を持つ
 - ▶ R は推移性を持つ
- ▶ 反射性 : 任意の $x \in A$ に対して, $x R x$
 - ▶ 反対称性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R x$ ならば $x = y$
 - ▶ 推移性 : 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R z$ ならば $x R z$

半順序を表す記号

半順序を表すために, R ではなくて, 特別な記号を使うことが多い

半順序を表す記号の例

- ▶ \leq
- ▶ \prec
- ▶ \leq
- ▶ \preceq
- ▶ \subseteq
- ▶ \dots

その否定を表す記号の例

- ▶ $\not\leq$
- ▶ $\not\prec$
- ▶ $\not\leq$
- ▶ $\not\preceq$
- ▶ $\not\subseteq$
- ▶ \dots

状況に応じて, 使い分けられたりする
(この講義では専ら「 \leq 」を用いていく)

スケジュール 前半

- * 休講 (4月8日)
- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (4月15日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (4月22日)
- * 昭和の日 (4月29日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (5月6日)
- 4 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 (5月13日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (5月20日)
- 6 証明法 (3) : 集合に関する証明 (5月27日)
- 7 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (6月3日)
- 中間試験 (6月10日)

今日の概要

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
 - ▶ ハッセル図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
 - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
 - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)

格言

順序関係は階層性を扱うための道具

階層 : ヒエラルキー

全順序 : 復習

集合 A と A 上の関係 R

全順序とは?

R が全順序であるとは、次を満たすこと

- ▶ R は反射性を持つ
 - ▶ R は反対称性を持つ
 - ▶ R は推移性を持つ
 - ▶ R は完全性を持つ
- ▶ 反射性 : 任意の $x \in A$ に対して, $x R x$
 - ▶ 反対称性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R x$ ならば $x = y$
 - ▶ 推移性 : 任意の $x, y, z \in A$ に対して, $x R y$ かつ $y R z$ ならば $x R z$
 - ▶ 完全性 : 任意の $x, y \in A$ に対して, $x R y$ または $y R x$

半順序集合と全順序集合

半順序集合とは?

集合 A と A 上の半順序 \preceq に対して
順序対 (A, \preceq) を半順序集合と呼ぶ

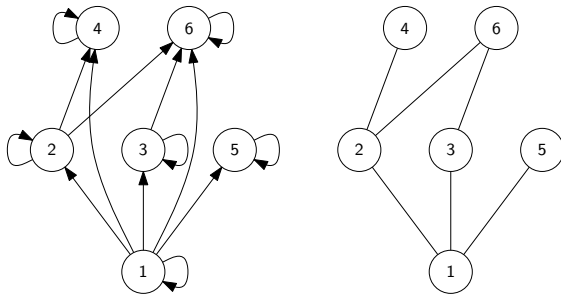
半順序集合のことをポセットと呼ぶこともある

全順序集合とは?

集合 A と A 上の全順序 \preceq に対して
順序対 (A, \preceq) を全順序集合と呼ぶ

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
 - 極大元, 極小元
 - 最大元, 最小元
 - 上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

ハッセ図は関係を表すグラフから冗長性を取り除いたもの

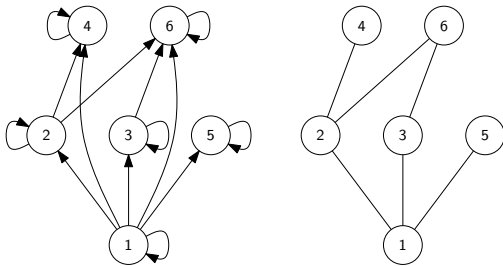


ハッセ図

ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(2) \preceq において大きい要素ほど上に描く



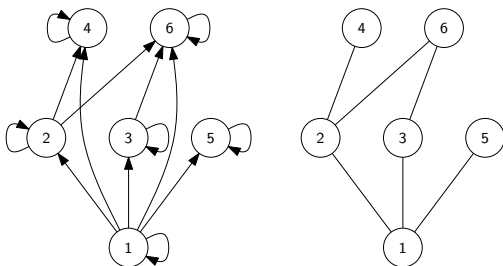
関係を表すグラフ ハッセ図

ハッセ図

ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

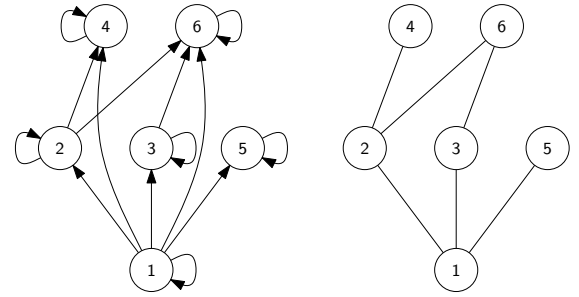
半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(4) どの線も下から上へ単調に描かれる



関係を表すグラフ ハッセ図

ハッセ図: とりあえず例を見てみる



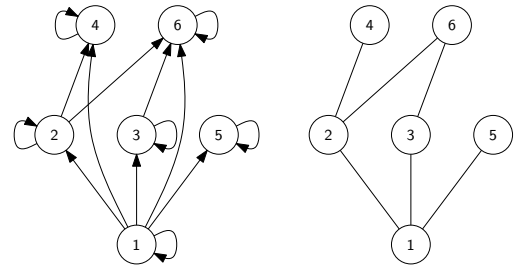
関係を表すグラフ ハッセ図

ハッセ図

ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(1) A の各要素を頂点として描く



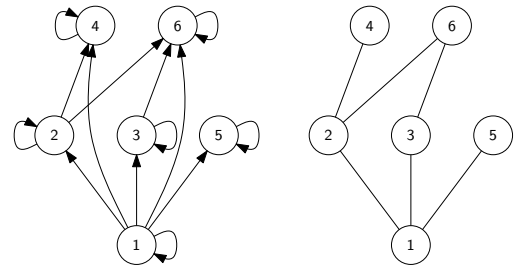
関係を表すグラフ ハッセ図

ハッセ図

ハッセ図とは? (常識に基づく定義)

半順序集合 (A, \preceq) のハッセ図とは、次の規則に従って描いた図

(3) $x \preceq y$ で、 x から y へ「遠回り」がないとき、 x と y を線で結ぶ



関係を表すグラフ ハッセ図

比較可能性と比較不能性

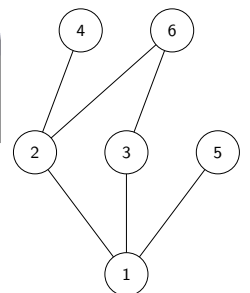
半順序集合 (A, \preceq)

比較可能とは?

- ▶ $x, y \in A$ が比較可能であるとは $x \preceq y$ または $y \preceq x$ であること
- ▶ そうでないとき、 x, y は比較不能

例:

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能



格言

比較不能なものを扱える半順序思考

比較可能性と比較不能性：ハッセ図において

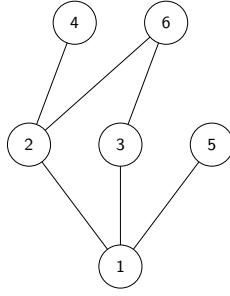
半順序集合 (A, \preceq)

ハッセ図で比較可能性を読み取る

- ▶ $x, y \in A$ が比較可能である \Leftrightarrow x と y を結ぶ単調な「道」が存在する
- ▶ $x, y \in A$ が比較可能でない \Leftrightarrow x と y を結ぶ単調な「道」が存在しない

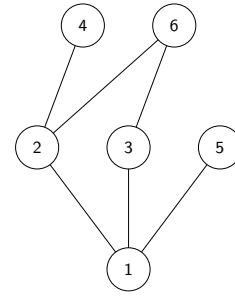
例：

- ▶ 2 と 6 は比較可能
- ▶ 1 と 4 は比較可能
- ▶ 2 と 3 は比較不能
- ▶ 4 と 6 は比較不能



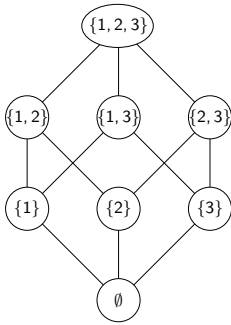
いろいろな半順序集合 (1)

$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ (「 $a | b$ 」とは「 a は b の約数」の意味)



いろいろな半順序集合 (2)

$(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$

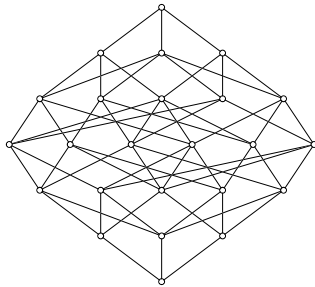


いろいろな半順序集合 (3)

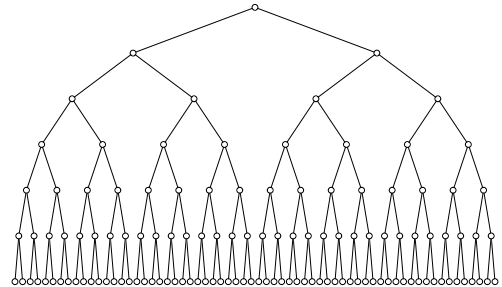
$(\{1, 2, 3, 4\}, \leq)$



いろいろな半順序集合 (4)

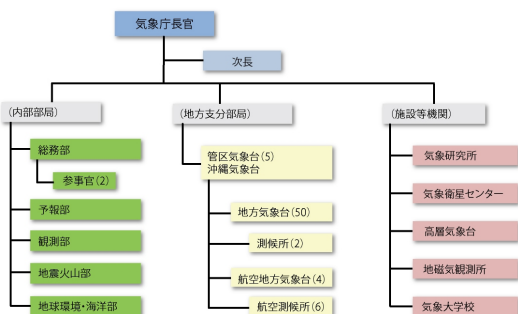


いろいろな半順序集合 (5)



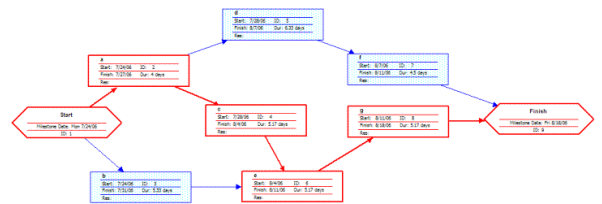
根付き木と呼ばれる (正確な定義はしない)

半順序集合の例 (1)：階層的組織



<http://www.jma.go.jp/jma/kishou/intro/gyomu/index3.html>

半順序集合の例 (2)：先行関係を持つジョブのスケジューリング



http://en.wikipedia.org/wiki/File:PERT_example_network_diagram.gif

半順序集合 (A, \preceq) について

- ▶ 「 $a \preceq b$ 」であることを「 $b \succeq a$ 」とも書く
- ▶ 「 $a \preceq b$ かつ $a \neq b$ 」であることを「 $a \prec b$ 」と書く
- ▶ 「 $a \prec b$ 」であることを「 $b \succ a$ 」とも書く

注意

- ▶ 「 $a \preceq b$ 」と「 $a \succ b$ 」が同値であるとは限らない
- ▶ ただし、 \preceq が全順序ならば、この2つは同値 (演習問題)

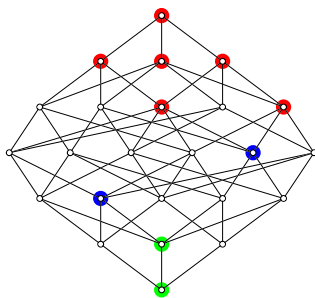
例:

- ▶ 半順序集合 $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ において、 $\{2,3\} \not\subseteq \{1\}$ であるが、 $\{2,3\} \cap \{1\}$ ではない
- ▶ 全順序集合 $(\{1,2,3,4\}, \leq)$ において、 $3 \leq 2$ であり、すなわち、 $3 > 2$ である

- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
極大元, 極小元
最大元, 最小元
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

上界

青と赤を比べると、必ず、青 \preceq 赤 が成り立つ



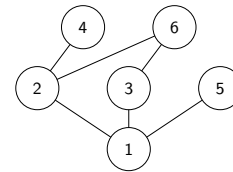
どの赤も任意の青以上である

上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 6 は $\{2,3\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 6$ は成立, $3 \preceq 6$ は成立

 B の上界とは?: 直感的な説明

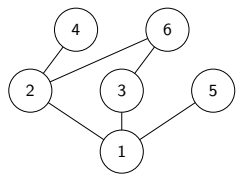
A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 4 は $\{2\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 4$ は成立

 B の上界とは?: 直感的な説明

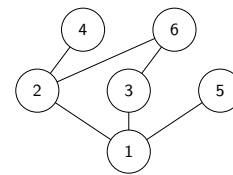
A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



- ▶ 2 は $\{2\}$ の上界
- ▶ $2 \preceq 2$ は成立

 B の上界とは?: 直感的な説明

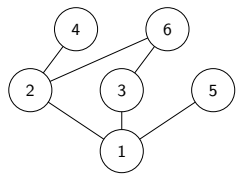
A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

上界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の上界とは?

集合 B の上界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $b \preceq a$



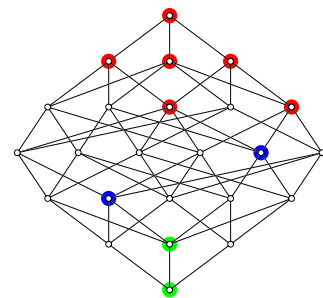
- ▶ $\{2,5\}$ の上界は存在しない
- ▶ $2 \preceq 1$ は不成立, $5 \preceq 1$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 2$ は成立, $5 \preceq 2$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 3$ は不成立, $5 \preceq 3$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 4$ は成立, $5 \preceq 4$ は不成立
- ▶ $2 \preceq 5$ は不成立, $5 \preceq 5$ は成立
- ▶ $2 \preceq 6$ は成立, $5 \preceq 6$ は不成立

 B の上界とは?: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも上にある (あるいは同じ) もの

下界

青と緑を比べると、必ず、緑 \preceq 青 が成り立つ



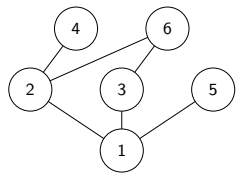
どの緑も任意の青以下である

下界

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の下界 (かかい) とは？

集合 B の下界とは、要素 $a \in A$ で、次を満たすもの
任意の $b \in B$ に対して $a \preceq b$

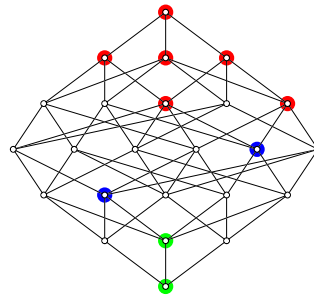


- ▶ 1 は $\{2, 3\}$ の下界
- ▶ 1 は $\{2\}$ の下界
- ▶ 2 は $\{2\}$ の下界
- ▶ 2 は $\{2, 6\}$ の下界
- ▶ 1 は $\{2, 6\}$ の下界

 B の下界とは？: 直感的な説明

A の要素で、 B のどの要素よりも下にある (あるいは同じ) もの

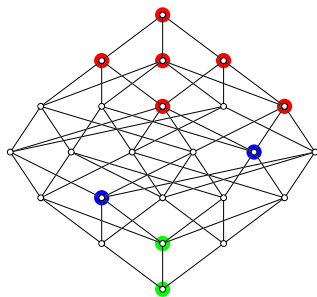
上界と下界: 例



- ▶ 赤は青の2要素から成る集合の上界
- ▶ 緑は青の2要素から成る集合の下界

上界と下界: 例

半順序が組織における序列を表すとすると...



- ▶ B の上界とは、 B の共通上司 (ただし、自分は自分の上司だとする)
- ▶ B の下界とは、 B の共通部下 (ただし、自分は自分の部下だとする)

目次

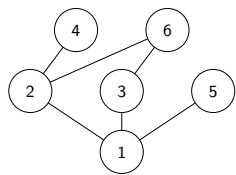
- ① ハッセ図
- ② 上界と下界
- ③ その他の用語
極大元, 極小元
最大元, 最小元
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- ④ 今日のまとめ

極大元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の極大元 (極大要素) とは？

集合 B の極大元とは、要素 $b \in B$ で、次を満たすもの
任意の $b' \in B$ に対して、 $b \preceq b'$ ならば $b = b'$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元ではない
- ▶ 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元
- ▶ 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極大元

 B の極大元とは？: 直感的な説明

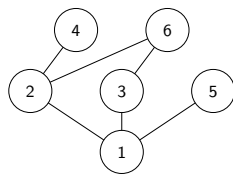
B の要素で、 B の他の要素がそれより上にないもの

極小元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

 B の極小元 (極小要素) とは？

集合 B の極小元とは、要素 $b \in B$ で、次を満たすもの
任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$ ならば $b = b'$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- ▶ 3 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元
- ▶ 4 は $\{2, 3, 4\}$ の極小元ではない

 B の極小元とは？: 直感的な説明

B の要素で、 B の他の要素がそれより下にないもの

極大元が存在しない例

- ▶ 半順序集合 (\mathbb{R}, \leq) (注: これは全順序集合でもある)
- ▶ $B = (0, 1) = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ かつ } 0 < x < 1\}$
- ▶ このとき、 B の極大元は存在しない

証明すべきこと (定義に立ち戻って書き直す)

任意の $b \in B$ に対して、
「任意の $b' \in B$ に対して、 $b \leq b'$ ならば $b = b'$ 」ではない

証明すべきこと (書き換え)

任意の $b \in B$ に対して、
「ある $b' \in B$ に対して、『 $b \leq b'$ ならば $b = b'$ 』ではない」

証明のために行うこと

- ▶ 任意の $b \in B$ を考える
- ▶ b を使って、 $b \leq b'$ であるが、 $b = b'$ とならない $b' \in B$ を見つける

極大元が存在しない例: 証明

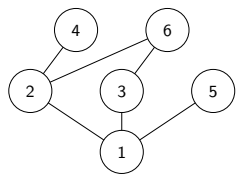
- ▶ 任意の $b \in (0, 1)$ を考える。
- ▶ $b' = \frac{b+1}{2}$ とする。
- ▶ $b > 0$ なので、 $b' = \frac{b+1}{2} > \frac{0+1}{2} > 0$ 。
- ▶ また、 $b < 1$ なので、 $b' = \frac{b+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ 。
- ▶ したがって、 $b' \in (0, 1)$ 。
- ▶ $b < 1$ なので、 $b = \frac{b+b}{2} < \frac{b+1}{2} = b'$ 。
- ▶ したがって、ある $b' \in (0, 1)$ が存在して、 $b \leq b'$ かつ $b \neq b'$ となる。
- ▶ したがって、 $(0, 1)$ の極大元は存在しない。□

最大元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最大元 (最大要素) とは?

集合 B の**最大元**とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの
任意の $b' \in B$ に対して $b' \preceq b$



- ▶ 2 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元ではない
- ▶ 6 は $\{2, 3, 6\}$ の最大元
- ▶ $\{2, 3\}$ の最大元は存在しない

B の最大元とは?: 直感的な説明

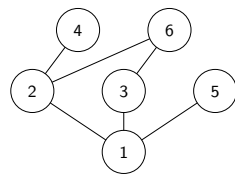
B の要素で, B の他のどの要素よりも大きいもの

最小元

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の最小元 (最小要素) とは?

集合 B の**最小元**とは, 要素 $b \in B$ で, 次を満たすもの
任意の $b' \in B$ に対して $b \preceq b'$



- ▶ 2 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元ではない
- ▶ 1 は $\{1, 2, 3\}$ の最小元
- ▶ $\{2, 3\}$ の最小元は存在しない

B の最小元とは?: 直感的な説明

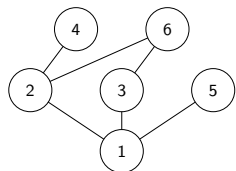
B の要素で, B の他のどの要素よりも小さいもの

上限 (最小上界)

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の上限とは?

集合 B の**上限**とは, B の上界 $a \in A$ で, 次を満たすもの
 B の任意の上界 $a' \in A$ に対して $a \preceq a'$



- ▶ 6 は $\{2, 3\}$ の上限
- ▶ 2 は $\{2\}$ の上限

B の上限とは?: 直感的な説明

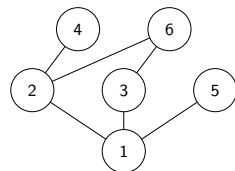
B の上界で, B の他のどの上界よりも小さいもの

下限 (最大下界)

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

B の下限とは?

集合 B の**下限**とは, B の下界 $a \in A$ で, 次を満たすもの
 B の任意の下界 $a' \in A$ に対して $a' \preceq a$



- ▶ 1 は $\{2, 3\}$ の下限
- ▶ 2 は $\{2\}$ の下限

B の下限とは?: 直感的な説明

B の下界で, B の他のどの下界よりも大きいもの

様々な性質と記法

半順序集合 (A, \preceq) と A の部分集合 $B \subseteq A$

性質 (証明は演習問題)

- ▶ B の最大元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最大元は, 存在するならば, B の極大元でもある.
- ▶ B の上限は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最小元は, 存在するならば, ただ一つ.
- ▶ B の最小元は, 存在するならば, B の極小元でもある.
- ▶ B の下限は, 存在するならば, ただ一つ.

記法

存在するとき,
 B の最大元を $\max B$ と, B の上限を $\sup B$ と,
 B の最小元を $\min B$ と, B の下限を $\inf B$ と表記することができる

極大元, 極小元, 最大元, 最小元, 上限, 下限: 直感?

半順序が組織における序列を表すとすると...

- ▶ B の極大元とは, B の中で, 自分以外に上司がない人
 - ▶ B の最大元とは, B の中で, 自分以外がすべて部下である人
 - ▶ B の上限とは, B の共通上司の中で, 自分以外がすべて上司である人
 - ▶ B の極小元とは, B の中で, 自分以外に部下がない人
 - ▶ B の最小元とは, B の中で, 自分以外がすべて上司である人
 - ▶ B の下限とは, B の共通部下の中で, 自分以外がすべて部下である人
- (ただし, 自分は自分の上司, 自分の部下だとする)

目次

- 1 ハッセ図
- 2 上界と下界
- 3 その他の用語
極大元, 極小元
最大元, 最小元
上限 (最小上界), 下限 (最大下界)
- 4 今日のまとめ

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 順序関係を図示する方法を理解する
 - ▶ ハッセ図
- ▶ 順序関係に関する概念を理解する
 - ▶ 上界, 極大元, 最大元, 上限 (最小上界)
 - ▶ 下界, 極小元, 最小元, 下限 (最大下界)