離散数学 第 9 回
写像 (2)：全射と単射

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 6 月 24 日

最終更新：2016 年 6 月 23 日　14:29

スケジュール 前半

＊ 休講	(4 月 8 日)
1 集合と論理 (1)：命題論理	(4 月 15 日)
2 集合と論理 (2)：集合と論理の対応	(4 月 22 日)
＊ 昭和の日	(4 月 29 日)
3 集合と論理 (3)：述語論理	(5 月 6 日)
4 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明	(5 月 13 日)
5 証明法 (2)：含意を含む命題の証明	(5 月 20 日)
6 証明法 (3)：集合に関する証明	(5 月 27 日)
7 集合と論理 (4)：直積と冪集合	(6 月 3 日)
• 中間試験	(6 月 10 日)

スケジュール 後半 (予定)

8 写像 (1)：像と逆像	(6 月 17 日)
9 写像 (2)：全射と単射	(6 月 24 日)
10 関係 (1)：関係	(7 月 1 日)
11 関係 (2)：同値関係	(7 月 8 日)
12 関係 (3)：順序関係	(7 月 15 日)
13 証明法 (4)：数学的帰納法	(7 月 22 日)
14 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義	(7 月 29 日)
• 期末試験	(8 月 5 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な写像「全射」，「単射」，「全単射」を理解して，その性質と違いを論述できるようになる
- 写像の逆写像を理解し，その存在性の判定，および構成ができるようになる

目次

1. 対応をつけること と 数えること
2. 全射
3. 単射
4. 全単射と逆写像
5. 今日のまとめ

マンツーマンディフェンス

全単射の例

新幹線の指定席

単射の例

目次

1. 対応をつけること と 数えること
2. 全射
3. 単射
4. 全単射と逆写像
5. 今日のまとめ

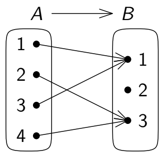
全射

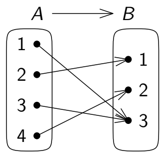
集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

全射とは？

f が全射であるとは，次を満たすこと

任意の $b \in B$ に対して，ある $a \in A$ が存在して $b = f(a)$



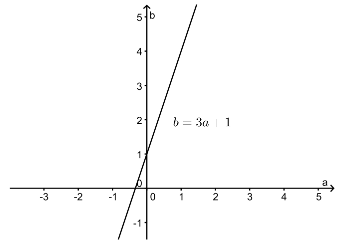


例題 1

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$



例題 1：続き

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

全射の定義に立ち戻って書き直す

任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$」となることを証明する)
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． □

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 1：証明

例題 1

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射であることを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a + 1$

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ を考える．

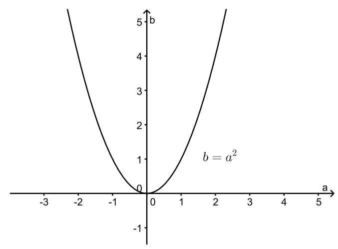
- $a = \frac{b-1}{3}$ とする．
- $b \in \mathbb{R}$ なので，$a \in \mathbb{R}$ である．
- また，$3a + 1 = 3 \cdot \frac{b-1}{3} + 1 = b$ となる．
- したがって，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = 3a + 1$
- したがって，f は全射である． □

例題 2

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$



例題 2：続き

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，ある $a \in \mathbb{R}$ が存在して，$b = a^2$」ではない

整理する

ある $b \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$b \neq a^2$

「〜が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ,「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する).

例題 2：証明

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- (ここで,「任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$」を証明する．)
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$.
- したがって，f は全射でない． □

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 2：証明

例題 2

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$-1 \in \mathbb{R}$ を考える．

- 任意の $a \in \mathbb{R}$ を考える．
- このとき，$a^2 \geq 0$ なので，$-1 \neq a^2$．
- したがって，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$-1 \neq a^2$．
- したがって，f は全射でない． □

補足：始域・終域の違いと全射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと全射かどうか変わるかも

次の 4 つの写像は全射か？

- $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$
- $f_2\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$
- $f_3\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$
- $f_4\colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識　(似たものに「行列のサイズ」がある)

目次

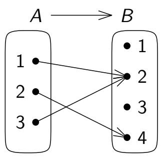
単射

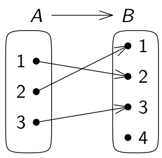
集合 A, B と写像 $f\colon A \to B$

単射とは？

f が単射であるとは，次を満たすこと

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad f(a) = f(a') \text{ ならば } a = a'$$





単射の定義にある性質は次と同値 (対偶法則による)

$$\text{任意の } a, a' \in A \text{ に対して，} \quad a \neq a' \text{ ならば } f(a) \neq f(a')$$

例題 3

例題 3

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

定義に立ち戻って書き直す

任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$3a + 1 = 3a' + 1$ ならば $a = a'$

例題 3：証明

例題 3

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射であることを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

証明：任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ を考える．

- $3a + 1 = 3a' + 1$ であると仮定する．
- このとき，$a = a'$ である．
- したがって，f は単射である． □

例題 4

例題 4

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

定義に立ち戻って書き直す

「任意の $a, a' \in \mathbb{R}$ に対して，$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

整理する

ある $a, a' \in \mathbb{R}$ が存在して「$a^2 = a'^2$ ならば $a = a'$」ではない

つまり，$a^2 = a'^2$ だが $a \neq a'$ となる $a, a' \in \mathbb{R}$ を見つければよい

例題 4

例題 4

次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射でないことを証明せよ．

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = a^2$$

証明：$a = 2 \in \mathbb{R}$ と $a' = -2 \in \mathbb{R}$ を考える．

- このとき，$a^2 = 4 = a'^2$ であるが，$a \neq a'$ である．
- したがって，f は単射でない． □

補足：始域・終域の違いと単射性の違い

見た目が同じでも，始域・終域が違うと単射かどうか変わるかも

次の 4 つの写像は単射か？

- $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(a) = a^2$
- $f_2 \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f_2(a) = a^2$
- $f_3 \colon [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f_3(a) = a^2$
- $f_4 \colon [0, 1] \to [0, \infty)$, $f_4(a) = a^2$

格言 (前回の講義より)

写像の始域と終域を常に意識　　(似たものに「行列のサイズ」がある)

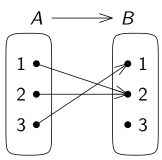
目次

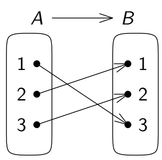
全単射

集合 A, B と写像 $f \colon A \to B$

全単射とは？

f が全単射であるとは，全射であり，かつ，単射であること



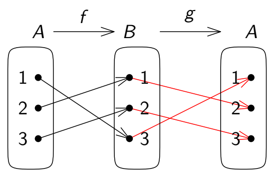


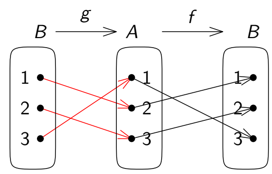
逆写像

集合 A, B と写像 $f \colon A \to B$

逆写像とは？

f の逆写像とは，写像 $g \colon B \to A$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすもの　　($\mathrm{id}_A \colon A \to A$，$\mathrm{id}_B$ は恒等写像)





この f の逆写像は存在する

記法

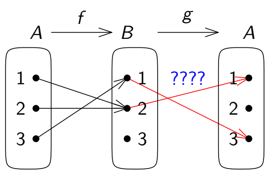
f の逆写像が存在するとき，それを f^{-1} で表す

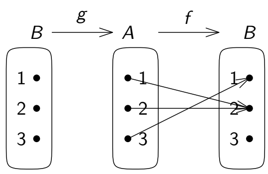
逆写像：存在しない場合

集合 A, B と写像 $f \colon A \to B$

逆写像とは？

f の逆写像とは，写像 $g \colon B \to A$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_B$ を満たすもの　　($\mathrm{id}_A \colon A \to A$，$\mathrm{id}_B$ は恒等写像)





この f の逆写像は存在しない

記法

f の逆写像が存在するとき，それを f^{-1} で表す

逆写像が存在するための必要十分条件

集合 A, B，写像 $f \colon A \to B$

逆写像が存在するための必要十分条件 (重要)

写像 f の逆写像が存在する $\Leftrightarrow$ f が全単射

証明は (長くなるので) 演習問題

全単射の逆写像 (1)

f が全単射であるとき

$$g \colon B \to A \text{ が } f \text{ の逆写像} \quad \Leftrightarrow \quad g \circ f = \mathrm{id}_A$$

つまり，f が全単射であるとき，$f \circ g = \mathrm{id}_B$ という条件は不要

全単射の逆写像 (2)

f が全単射であるとき

$$g \colon B \to A \text{ が } f \text{ の逆写像} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ g = \mathrm{id}_B$$

例題 5

例題 5

次の写像 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{任意の } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } f(a) = 3a + 1$$

は全単射であるが (例題 1，3)，
その逆写像 $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか，答えよ．

証明：任意の $b \in \mathbb{R}$ に対して，$f^{-1}(b) = \dfrac{b-1}{3}$ とする

- この f^{-1} が f の逆写像であることを証明する
- 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(3a+1) = \frac{(3a+1)-1}{3} = a$$

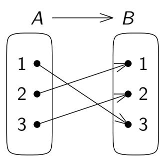
- したがって，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ となり，上の f^{-1} は f の逆写像である　□

逆写像と逆像：注意

注意

写像 $f \colon A \to B$

- $Y \subseteq B$ のとき，$f^{-1}(Y)$ は Y の逆像
  - f が全単射であろうがなかろうが定義される
- $b \in B$ のとき，$f^{-1}(b)$ は f の逆写像 f^{-1} の b における値
  - f が全単射であるときのみ定義される



- $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{2, 3\}$
- $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- $f^{-1}(2) = 3$

もう一つ注意

全単射の逆写像も全単射 (演習問題)

目次

今日のまとめ

この講義の目標

- 語学としての数学，コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- 特殊な写像「全射」,「単射」,「全単射」を理解して，
  その性質と違いを論述できるようになる
- 写像の逆写像を理解し，
  その存在性の判定，および構成ができるようになる