

離散数学 第8回
写像 (1) : 像と逆像

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016年6月17日

最終更新 : 2016年6月16日 14:33

スケジュール 前半

- * 休講 (4月8日)
- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (4月15日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (4月22日)
- * 昭和の日 (4月29日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (5月6日)
- 4 証明法 (1) : \exists と \forall を含む命題の証明 (5月13日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (5月20日)
- 6 証明法 (3) : 集合に関する証明 (5月27日)
- 7 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (6月3日)
- 中間試験 (6月10日)

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1) : 像と逆像 (6月17日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (6月24日)
- 10 関係 (1) : 関係 (7月1日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (7月8日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (7月15日)
- 13 証明法 (4) : 数学的帰納法 (7月22日)
- 14 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (7月29日)
- 期末試験 (8月5日?)

注意 : 予定の変更もありうる

今日の概要

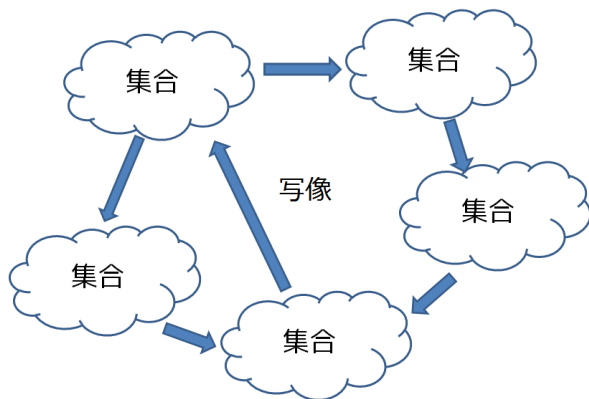
この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 写像 (関数) の定義と記法を理解し, 使えるようになる
- ▶ 写像による像と逆像, 写像の合成を理解する

ここまでのまとめ と ここからの話



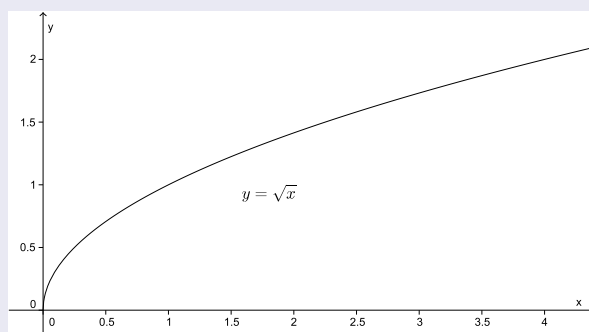
目次

- 1 写像 (関数)
- 2 像と逆像
- 3 写像の合成
- 4 証明の例題
- 5 今日のまとめ

関数と言って思い浮かべるものは? (1)

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



関数と言って思い浮かべるものは? (2)

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {  
    return a + b;  
}  
  
int absolute_value(int a) {  
    if (a < 0) {  
        return -a;  
    } else {  
        return a;  
    }  
}
```

写像とは

写像とは？

- ▶ 集合が2つある (AとBとする)
- ▶ Aの1つ1つの要素をBのある要素に「移す」

数学的に写像を定義すると？

- ▶ 任意の $a \in A$ に対して、ある $b \in B$ が一意に (ただ一つ) 存在して、 a を b に移す

記法は？

- ▶ 写像 $f: A \rightarrow B$
 - ▶ 任意の $a \in A$ に対して、ある $b \in B$ が一意に存在して、 $f(a) = b$
- 注: f によって a を移したものを $f(a)$ と書く

「写像」を「関数」とも呼ぶ

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲

プログラミングの「関数」

```
int sum(int a, int b) {
    return a + b;
}
```

- ▶ $\text{sum}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ 任意の $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に対して $\text{sum}((a, b)) = a + b$

注: $\mathbb{Z} =$ すべての整数から成る集合 (整数全体の集合)

発展的補足: 論理記号を用いて定義を書き直してみる

 f が A から B への写像であるとは

$$\forall a \in A (\exists! b \in B (f(a) = b))$$

「 $\exists!$ 」は「一意に存在して～」を表す記号

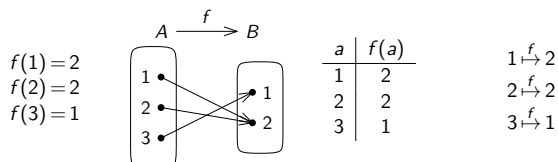
「 $\exists!$ 」を書き直すと

$$\forall a \in A (\exists b \in B ((f(a) = b) \wedge (\forall b' \in B (f(a) = b' \rightarrow b = b'))))$$

写像にまつわる記法と用語

集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B$

- ▶ $A \xrightarrow{f} B$
- ▶ $b = f(a)$ のとき 「 $f: a \mapsto b$ 」 や 「 $a \xrightarrow{f} b$ 」
- ▶ $f(a)$ を a における f の値という
- ▶ A を f の始域 (または定義域) という
- ▶ B を f の終域 という



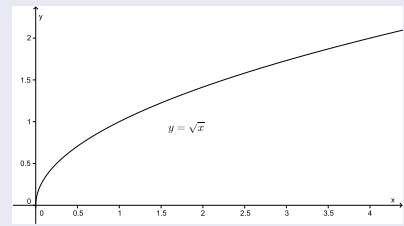
格言

写像の始域と終域を常に意識 (似たものに「行列のサイズ」がある)

関数と言って思い浮かべるものは？ (1) 再掲

数学 (?) の「関数」

関数 $y = \sqrt{x}$



- ▶ $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$
- ▶ 任意の $x \in [0, +\infty)$ に対して $f(x) = \sqrt{x}$

関数と言って思い浮かべるものは？ (2) 再掲 (続)

プログラミングの「関数」

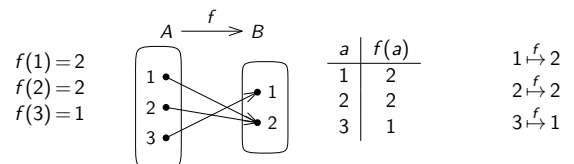
```
int absolute_value(int a) {
    if (a < 0) {
        return -a;
    } else {
        return a;
    }
}
```

- ▶ $\text{absolute_value}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
- ▶ 任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\text{absolute_value}(a) = \begin{cases} -a & (a < 0 \text{ のとき}) \\ a & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

写像の例

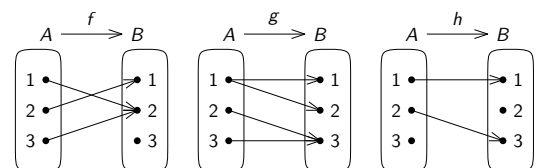
- ▶ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}$
- ▶ 写像 $f: A \rightarrow B$ を次のように定義
 - ▶ $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 1$



注意

「写像 $f: A \rightarrow B$ を定義する」ためには、任意の $a \in A$ に対して、 $f(a)$ が何であるかを定めればよい

問題: 次の図の中で写像を表すものは？



2つの写像が等しいということ

集合 A, B, C, D と写像 $f: A \rightarrow B, g: C \rightarrow D$

 f と g が等しいとは?

写像 f と g が等しいことを「 $f = g$ 」と書き、次の条件がすべて成り立つことと定義する

- ▶ $A = C$ (f と g の始域が等しい)
- ▶ $B = D$ (f と g の終域が等しい)
- ▶ すべての $a \in A$ に対して、 $f(a) = g(a)$ (写像の値が等しい)

恒等写像

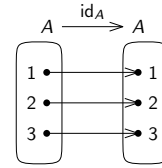
集合 A と写像 $f: A \rightarrow A$

恒等写像とは?

f が恒等写像であるとは、任意の $a \in A$ に対して $a = f(a)$ であること

- ▶ $A \rightarrow A$ の恒等写像を id_A と書くこともある
- ▶ 例: $A = \{1, 2, 3\}$ のとき $f: A \rightarrow A$ で

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3$$



目次

- 1 写像 (関数)
- 2 像と逆像
- 3 写像の合成
- 4 証明の例題
- 5 今日のまとめ

写像による像

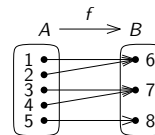
$f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは?

f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例: $f(\{1, 2, 3\})$ は?



- ▶ $6 \in f(\{1, 2, 3\})$ か?: $6 = f(1)$ なので YES
- ▶ $7 \in f(\{1, 2, 3\})$ か?: $7 = f(3)$ なので YES
- ▶ $8 \in f(\{1, 2, 3\})$ か?: $8 \neq f(1), 8 \neq f(2), 8 \neq f(3)$ なので NO

したがって、 $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$

写像による像: 他の例と注意

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは?

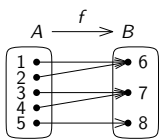
f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- ▶ X は A の部分集合 (A の要素ではない)
- ▶ $f(X)$ は B の部分集合

例



- ▶ $f(\{1, 2\}) = \{6\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3\}) = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \{6, 7, 8\}$
- ▶ $f(\{2\}) = \{6\}$

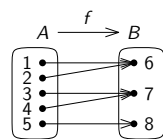
写像による像: 他の表現

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

f による X の像は次のようにも書ける

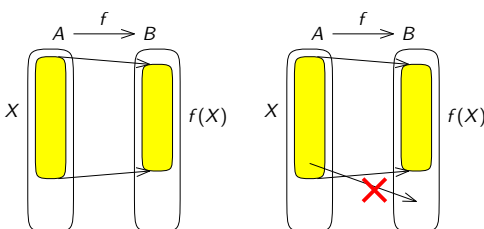
$$f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$$

例



- ▶ $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{6\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{6, 7\}$
- ▶ $f(\{2\}) = \{f(2)\} = \{6\}$

写像による像: 図による直感



写像による逆像

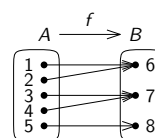
$f: A \rightarrow B$ を写像とする

逆像とは?

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

例: $f^{-1}(\{6, 7\})$ は?



- ▶ $1 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か?: $6 = f(1)$ なので YES
- ▶ $2 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か?: $6 = f(2)$ なので YES
- ▶ $3 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か?: $7 = f(3)$ なので YES
- ▶ $4 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か?: $7 = f(4)$ なので YES
- ▶ $5 \in f^{-1}(\{6, 7\})$ か?: $6 \neq f(5), 7 \neq f(5)$ なので NO

したがって、 $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$

写像による逆像：他の例と注意

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

逆像とは？

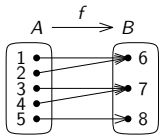
f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

注意

- ▶ Y は B の部分集合 (B の要素ではない)
- ▶ $f^{-1}(Y)$ は A の部分集合

例



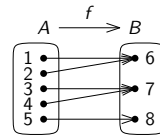
- ▶ $f^{-1}(\{6\}) = \{1, 2\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 7\}) = \{1, 2, 3, 4\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 7, 8\}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ $f^{-1}(\{7, 8\}) = \{3, 4, 5\}$
- ▶ $f^{-1}(\{6, 8\}) = \{1, 2, 5\}$

写像による逆像：注意 第2弾

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

注意：逆像を次のようには書かない

$$f^{-1}(Y) \stackrel{?}{=} \{f^{-1}(b) \mid b \in Y\}$$



- ▶ $f^{-1}(b)$ とは? (定義されないかも)
- ▶ $f^{-1}(b)$ が定義されるのは f が全単射であるときのみに (詳細は次回)

写像による逆像：図による直感

像と逆像：注意 (1)

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは？

f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$X \subseteq A$ から $f(X) \subseteq B$ は定まる

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

$f^{-1}(Y) \subseteq A$ は $Y \subseteq B$ から定まる

像と逆像：注意 (2)

$f: A \rightarrow B$ を写像とする

像とは？

f による部分集合 $X \subseteq A$ の像を $f(X)$ と書き

$$f(X) = \{b \mid b \in B \text{ かつ, ある } a \in X \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

f という写像に対して, $f(X)$ という記法が使える

逆像とは？

f による部分集合 $Y \subseteq B$ の逆像 (または原像) を $f^{-1}(Y)$ と書き

$$f^{-1}(Y) = \{a \mid a \in A \text{ かつ, ある } b \in Y \text{ が存在して } b = f(a)\}$$

f という写像に対して, $f^{-1}(Y)$ という記法が使える

- ▶ 「 f^{-1} という写像に対して, $f^{-1}(Y)$ という記法が使える」というわけではない
- ▶ f の逆写像が存在しなくても, f による逆像は定義される (次回参照)

写像の合成

集合 A, B, C と写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$

写像の合成とは？

写像 f と g の合成を $g \circ f: A \rightarrow C$ と表記し, 任意の $x \in A$ に対して

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

とすることで定義する

注意: f の終域と g の始域が同じでないといけない (同じでないときは合成を定義できない)

目次

- 1 写像 (関数)
- 2 像と逆像
- 3 写像の合成
- 4 証明の例題
- 5 今日のまとめ

写像の合成：例

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6, 7\}, C = \{8, 9\}$
- ▶ 写像 $f: A \rightarrow B$ を次で定義
 - ▶ $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$
- ▶ 写像 $g: B \rightarrow C$ を次で定義
 - ▶ $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$

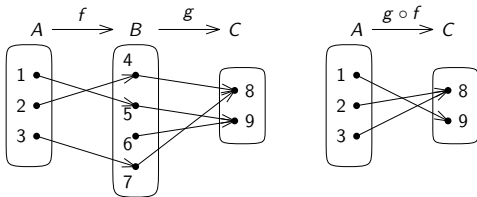
このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ を考えると,

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 8$$

写像の合成：例 (続)

- ▶ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{8, 9\}$
- ▶ 写像 $f: A \rightarrow B$ を次で定義
 - ▶ $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$
- ▶ 写像 $g: B \rightarrow C$ を次で定義
 - ▶ $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$

このとき, $g \circ f: A \rightarrow C$ を考えると,



目次

- ① 写像 (関数)
- ② 像と逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

例題 1

例題 1：次を証明せよ

任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の $X, X' \subseteq A$ に対して
 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$

図による直感

「任意の～に対して…である」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 「任意の～を考える」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える。

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する。
 - (ここで仮定を用いて「 $f(X) \subseteq f(X')$ 」を証明する)
- 8 したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である。
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である。 □

格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

「 $f(X) \subseteq f(X')$ 」を定義に立ち戻って書き換える

$b \in f(X)$ ならば $b \in f(X')$

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える。

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する。
- 2 $b \in f(X)$ であると仮定する。
 - (ここで仮定を用いて「 $b \in f(X')$ 」を証明する)
- 7 したがって, $b \in f(X')$ である。
- 8 したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である。
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である。 □

「 $b \in f(X')$ 」を定義に立ち戻って書き換える

ある $a \in X'$ が存在して, $b = f(a)$

「～が存在する」という命題の証明法 (第 4 回講義より)

- 1 存在する, といっているものを 1 つ見つけ, 「それを考える」と書く。
- 2 それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)。

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える。

- (ここで「 $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ 」を証明する)
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である。 □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

例題 1：証明

証明：任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える。

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する。
 - (ここで仮定を用いて「 $b \in f(X)$ ならば $b \in f(X')$ 」を証明する)
- 8 したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である。
- 9 したがって, $X \subseteq X'$ ならば $f(X) \subseteq f(X')$ である。 □

「～ならば…である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

- 1 「～であると仮定する」で始め, 「したがって, …である」で終わる
- 2 「～である」という性質を用いて, 「…である」を証明する

例題 1：整理, あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

- 1 $X \subseteq X'$
- 2 $b \in f(X)$
- 3 ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ ((2) より)
- 4 $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)

証明法：「 $\bigcirc\bigcirc$ を満たす $\triangle\triangle$ が存在する」が使えるとき (今回初登場)

- 1 「 $\bigcirc\bigcirc$ を満たす $\triangle\triangle$ を考える」とする
- 2 その $\triangle\triangle$ を使って, 証明を進める

例題 1: 整理, あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

- 1 $X \subseteq X'$
- 2 $b \in f(X)$
- 3 ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ ((2) より)
- 4 $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)
- 5 $a \in X'$ ((1) と (4) より)

部分集合に関する重要な性質 (第 6 回講義より)

$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば, $x \in B$

例題 1: 証明

証明: 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の集合 $X, X' \subseteq A$ を考える.

- 1 $X \subseteq X'$ であると仮定する.
- 2 $b \in f(X)$ であると仮定する.
- 3 (2) より, ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ となる.
- 4 (3) より, $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える.
- 5 (1) と (4) より, $a \in X'$ となる.
- 6 **したがって, (4) で考えた a は $b = f(a)$ と $a \in X'$ を満たす.**
- 7 **したがって, $b \in f(X')$ である.**
- 8 **したがって, $f(X) \subseteq f(X')$ である.** □

今日のまとめ

この講義の目標

- ▶ 語学としての数学, コミュニケーションとしての数学

今日の目標

- ▶ 写像 (関数) の定義と記法を理解し, 使えるようになる
- ▶ 写像による像と逆像, 写像の合成を理解する

例題 1: 整理, あるいは下書き

目標

$b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける

用いる性質

- 1 $X \subseteq X'$
- 2 $b \in f(X)$
- 3 ある $a \in X$ が存在して, $b = f(a)$ ((2) より)
- 4 $b = f(a)$ を満たす $a \in X$ を考える ((3) より)
- 5 $a \in X'$ ((1) と (4) より)

注

(4) で考えた a が
「 $b = f(a)$ となる $a \in X'$ を見つける」という目標の下で見つけた a

目次

- ① 写像 (関数)
- ② 像と逆像
- ③ 写像の合成
- ④ 証明の例題
- ⑤ 今日のまとめ

余談: 「関数」という用語

『数学の言葉づかい 100』(日本評論社, 1999 年) 58 ページより

関数の用語 *functio* は 17 世紀末ライプニッツにより初めて用いられた.

(中略)

関数がよく f で表されるのはこれにちなむもので, 各国語でもこのラテン語の直訳として *function*, *Funktion*, *fonction*, (中略) などが用いられている. わが国へは中国で音訳された函数が輸入され, 現在では代用漢字による関数があてられて, 初等教育の段階でほぼ定着した.