離散数学 第 6 回
証明法 (3)：集合に関する証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 5 月 27 日

最終更新：2016 年 5 月 26 日　13:37

スケジュール 前半 (予定)

- * 休講 (4 月 8 日)
- 1 集合と論理 (1)：命題論理 (4 月 15 日)
- 2 集合と論理 (2)：集合と論理の対応 (4 月 22 日)
- * 昭和の日 (4 月 29 日)
- 3 集合と論理 (3)：述語論理 (5 月 6 日)
- 4 証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明 (5 月 13 日)
- 5 証明法 (2)：含意を含む命題の証明 (5 月 20 日)
- 6 証明法 (3)：集合に関する証明 (5 月 27 日)
- 7 集合と論理 (4)：直積と冪集合 (6 月 3 日)
- 中間試験 (6 月 10 日)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1)：像と逆像 (6 月 17 日)
- 9 写像 (2)：全射と単射 (6 月 24 日)
- 10 関係 (1)：関係 (7 月 1 日)
- 11 関係 (2)：同値関係 (7 月 8 日)
- 12 関係 (3)：順序関係 (7 月 15 日)
- 13 証明法 (4)：数学的帰納法 (7 月 22 日)
- 14 集合と論理 (5)：集合の再帰的定義 (7 月 29 日)
- 期末試験 (8 月 5 日？)

注意：予定の変更もありうる

今日の概要

今日の目標

- 論理を用いて，部分集合を定義し，それを理解する
- 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- 推論の類型として，4 つの推論規則が使えるようになる
  - モードゥス・ポネンス
  - モードゥス・トレンス
  - 仮言三段論法
  - 選言三段論法

(注：この 4 つの推論規則の名称は重要ではない)

目次

1. 集合の包含関係：部分集合
2. 推論とその類型
3. 部分集合に関する重要な性質
4. 部分集合に関する性質の証明
5. 今日のまとめ

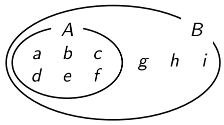
部分集合：直感

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



部分集合とは？ (直感)

集合 A が集合 B の部分集合であるとは，
A が B に含まれている (包含されている) こと

「含まれている」とは？ 論理を使って書くことを考える

部分集合：定義

部分集合とは？ (論理を使った定義)

A が B の部分集合であるとは，

$x \in A$　ならば　$x \in B$

記号で書けば，$x \in A \rightarrow x \in B$

部分集合の記法

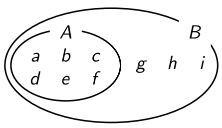
A が B の部分集合であることを「$A \subseteq B$」と表記する
(「$A \subset B$」や「$A \subseteqq B$」と表記することもある)

次の 2 つの集合を考える

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

A は B の部分集合

オイラー図による直感



同じ集合

$A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$x \in A \quad \leftrightarrow \quad x \in B$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$A \subseteq B$　かつ　$B \subseteq A$

が真となること (成り立つこと) と同じ

$$
\begin{aligned}
A = B &\Leftrightarrow x \in A \leftrightarrow x \in B && (= \text{の定義}) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A) && (\text{実質含意}) \\
&\Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) && (\text{部分集合の定義})
\end{aligned}
$$

同じ集合：まとめ

$A = B$ の定義は？

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$x \in A \quad \leftrightarrow \quad x \in B$$

が真となること (成り立つこと) であった

「部分集合の定義」と「実質同値」を思い出すと

集合 A, B に対して，$A = B$ とは

$$A \subseteq B \quad \text{かつ} \quad B \subseteq A$$

が真となること (成り立つこと) と同じ

つまり，

集合が同じであることの言い換え

集合 A, B に対して

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

部分集合：重要な性質

空集合はすべての集合の部分集合である

任意の集合 A に対して，

$$\emptyset \subseteq A$$

証明：$x \in \emptyset \to x \in A$ が恒真式であることを示す

- $\mathrm{F} \to x \in A$ は恒真式である
- $x \in \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{F}$ である
- したがって，$x \in \emptyset \to x \in A$ も恒真式である □

目次

1. 集合の包含関係：部分集合
2. 推論とその類型
3. 部分集合に関する重要な性質
4. 部分集合に関する性質の証明
5. 今日のまとめ

推論と証明法

「〜ならば…である」という命題の証明法 (再掲)

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

今後出てくる証明にあること

- 証明で 用いる性質 が複雑になってくる
  - 用いる性質どうしを組み合わせて，使える性質を導く (推論)
  - 用いる性質：仮定，または，仮定の下で正しいと分かっていること
- 証明で 示したい事項 が複雑になってくる
  - 示したいことを変更して，証明をしやすくする

推論とは？

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

- 解釈：P が正しいとき，Q も正しいので，そのような置換が可能
- 実は今までも無意識に用いている

第 4 回講義資料より：例題

例題：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- 左辺 − 右辺 $= x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$. ←ここ
- したがって，$x^2 + 1 \geq 2x$ である. □

用いている推論

a が実数である $\Rightarrow a^2 \geq 0$

推論の類型

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある $\rightsquigarrow$ それをまず紹介

- モードゥス・ポネンス
- モードゥス・トレンス
- 仮言三段論法
- 選言三段論法

モードゥス・ポネンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \wedge (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

つまり，

- P が使える性質
- $P \to Q$ が使える性質

であるとき，Q を新たに使える性質として導ける

モードゥス・トレンス

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

モードゥス・トレンス (モーダス・トレンス)

$$(P \to Q) \land \neg Q \quad \Rightarrow \quad \neg P$$

つまり，
- $P \to Q$ が使える性質
- $\neg Q$ が使える性質

であるとき，$\neg P$ を新たに使える性質として導ける

仮言三段論法

任意の命題変数 P, Q, R に対して，次が成り立つ

仮言三段論法 (三段論法)

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \quad \Rightarrow \quad P \to R$$

つまり，
- $P \to Q$ が使える性質
- $Q \to R$ が使える性質

であるとき，$P \to R$ を新たに使える性質として導ける

選言三段論法

任意の命題変数 P, Q に対して，次が成り立つ

選言三段論法

$$(P \lor Q) \land \neg P \quad \Rightarrow \quad Q$$

つまり，
- $P \lor Q$ が使える性質
- $\neg P$ が使える性質

であるとき，Q を新たに使える性質として導ける

推論の類型 (再掲)

推論とは？ (常識に基づいた定義)

「$P \Rightarrow Q$」であるとき，
用いる性質 (仮定) の中の P を Q で置き換えること

よく出てくる推論の形がある ⇝ それをまず紹介
- モードゥス・ポネンス
- モードゥス・トレンス
- 仮言三段論法
- 選言三段論法

これらを用いて証明を行っていく

目次

1. 集合の包含関係：部分集合
2. 推論とその類型
3. 部分集合に関する重要な性質
4. 部分集合に関する性質の証明
5. 今日のまとめ

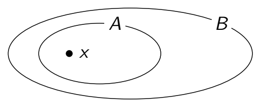
例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，　$x \in B$

オイラー図による直感



注意：「ならば」の前の部分 (仮定) を満たすように図を描く

「〜ならば…である」という命題の証明法 (第 5 回講義より)

1. 「〜であると仮定する」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. 「〜である」という性質を用いて,「…である」を証明する

例題 1

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，　$x \in B$

証明：任意の集合 A, B と任意の x を考える
1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$x \in A$ であると仮定する
3. (1) と部分集合の定義より,「$x \in A$ ならば $x \in B$」が成り立つ.
4. (2) と (3) より，$x \in B$ が成り立つ.
5. したがって，$x \in B$ である

したがって，任意の集合 A, B と任意の x に対して，$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，$x \in B$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \to Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

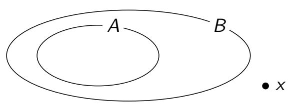
例題 2

次を証明せよ

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$A \subseteq B$ かつ $x \notin B$ ならば，　$x \notin A$

オイラー図による直感



証明は演習問題 (ヒント：モードゥス・トレンスを用いる)

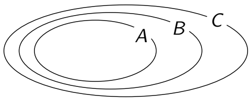
例題 3

次を証明せよ

任意の集合 A, B, C に対して，

$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，　$A \subseteq C$

オイラー図による直感



格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 3

証明：任意の集合 A, B, C を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$B \subseteq C$ であると仮定する
3. $x \in A$ であると仮定する

7. したがって，　$x \in C$ が成り立つ
8. したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，任意の集合 A, B, C に対して，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

証明したいことは,「$x \in A$ ならば $x \in C$」

部分集合とは？ (論理を使った定義)

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A) \rightarrow (x \in B)$$

例題 3

証明：任意の集合 A, B, C を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$B \subseteq C$ であると仮定する
3. $x \in A$ であると仮定する
4. (1) と部分集合の定義より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である
5. (2) と部分集合の定義より，$x \in B$ ならば $x \in C$ である
6. (4) と (5) より，$x \in A$ ならば $x \in C$ となる
7. したがって，(3) と (6) より，$x \in C$ が成り立つ
8. したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，任意の集合 A, B, C に対して，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

仮言三段論法

$$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R) \quad \Rightarrow \quad (P \rightarrow R)$$

例題 3

別証明：任意の集合 A, B, C を考える

1. $A \subseteq B$ であると仮定する
2. また，$B \subseteq C$ であると仮定する
3. $x \in A$ であると仮定する
4. (1) と部分集合の定義より，$x \in A$ ならば $x \in B$ である
5. (2) と部分集合の定義より，$x \in B$ ならば $x \in C$ である
6. (3) と (4) より，$x \in B$ が成り立つ
7. したがって，(5) と (6) より，$x \in C$ が成り立つ
8. したがって，$A \subseteq C$ となる

したがって，任意の集合 A, B, C に対して，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，$A \subseteq C$ となる □

モードゥス・ポネンス (モーダス・ポネンス)

$$P \land (P \rightarrow Q) \quad \Rightarrow \quad Q$$

部分集合に関する重要な性質：復習

次の 3 つはいずれも正しい

例題 1

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$A \subseteq B$ かつ $x \in A$ ならば，　$x \in B$

例題 2

任意の集合 A, B と任意の x に対して，

$A \subseteq B$ かつ $x \notin B$ ならば，　$x \notin A$

例題 3

任意の集合 A, B, C に対して，

$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば，　$A \subseteq C$

今後断りなく，この 3 つを (再度証明せずに) 用いることがある

目次

1. 集合の包含関係：部分集合
2. 推論とその類型
3. 部分集合に関する重要な性質
4. 部分集合に関する性質の証明
5. 今日のまとめ

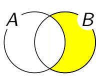
例題 4

次を証明せよ

任意の集合 A, B に対して，

$(A \cup B) - A \subseteq B$

オイラー図による直感



格言 (第 4 回講義より)

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

例題 4

証明：任意の集合 A, B を考える

1. $x \in (A \cup B) - A$ であると仮定する
2. (1) と集合差の定義より，$x \in A \cup B$ かつ $x \notin A$ が成り立つ
3. (2) より，$x \in A \cup B$ が成り立つ
4. 同じく (2) より，$x \notin A$ が成り立つ
5. (3) と合併の定義より，$x \in A$ または $x \in B$ が成り立つ
6. したがって，(4) と (5) より，$x \in B$ が成り立つ
7. したがって，$(A \cup B) - A \subseteq B$ である

したがって，任意の集合 A, B に対して，$(A \cup B) - A \subseteq B$ となる □

推論規則 ($\land$ の除去)　(演習問題)

$$P \land Q \quad \Rightarrow \quad P$$

例題 5

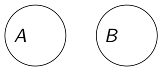
次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B に対して

$$A \cap B = \emptyset \text{ ならば } A \subseteq A - B$$

が成り立つ．

オイラー図による直感



例題 5 の解答例

例題 5 の解答例：正しい．理由は以下の通りである．

1. 任意の集合 A, B を考え，$A \cap B = \emptyset$ であると仮定する
2. $x \in A$ であると仮定する
3. (1) と空集合の定義より，$x \notin A \cap B$ が成り立つ
4. (3) と共通部分の定義より，$x \notin A$ または $x \notin B$ が成り立つ
5. (2) と (4) より，$x \notin B$ が成り立つ
6. (2) と (5) と集合差の定義より，$x \in A - B$ が成り立つ
7. したがって，$A \subseteq A - B$ が成り立つ
8. したがって，任意の集合 A, B に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば，$A \subseteq A - B$ となる □

共通部分の定義とド・モルガンの法則より

$$x \notin A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A \text{ または } x \notin B$$

例題 6

次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A - B = A - C \text{ ならば } B = C$$

が成り立つ．

格言

オイラー図で直感を得る

「〜ならば…である」という命題が正しいか，正しくないか (第 5 回講義の復習)

正しい場合

- 先ほどのように証明する

正しくない場合

- 「〜」を満たすが「…」とならないものを見つける (反例を挙げる)

例題 6 の解答例

例題 6 の解答例：正しくない．理由は以下の通りである．

1. 集合 $A = \{1, 2\}$，$B = \{2, 3\}$，$C = \{2, 4\}$ を考える
2. このとき，$A - B = \{1\}$ と $A - C = \{1\}$ が成り立つ
3. したがって，$A - B = A - C$ が成り立つ
4. 一方，$3 \in B$ かつ $3 \notin C$ なので，$B \neq C$ が成り立つ □

例題 6：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の集合 A, B, C に対して

$$A - B = A - C \text{ ならば } B = C$$

が成り立つ．

目次

1. 集合の包含関係：部分集合
2. 推論とその類型
3. 部分集合に関する重要な性質
4. 部分集合に関する性質の証明
5. 今日のまとめ

今日のまとめ

今日の目標

- 論理を用いて，部分集合を定義し，それを理解する
- 集合の包含関係に関する証明ができるようになる
- 推論の類型として，4 つの推論規則が使えるようになる
  - モードゥス・ポネンス
  - モードゥス・トレンス
  - 仮言三段論法
  - 選言三段論法

(注：この 4 つの推論規則の名称は重要ではない)

補足

別の推論，証明法は今後登場するときに紹介する