離散数学 第 4 回
証明法 (1)：∃と∀を含む命題の証明

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 5 月 13 日

最終更新：2016 年 5 月 9 日　05:10

1 学期間の概要 (再掲)

主題

- 理工学のあらゆる分野に現れる数学の言葉と論理を徹底的に身につける
- これによって，論理的な思考を行う基礎能力を体得し，将来的に，専門書を読み解き，自分で学術的な文書を書くことができるようにする
- キャッチフレーズは「語学としての数学」

達成目標

以下の 2 項目をすべて達成することを目標とする．

1. 数学における基本的な用語 (集合，論理，写像，関係) を正しく使うことができる
2. 数学における基本的な証明を正しく行うことができる

今日の概要

今日の目標

- 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ∃や∀を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？

- 証明は論理的思考の根幹 $\rightsquigarrow$ 論理的思考の訓練
- 証明は文章 (主張) $\rightsquigarrow$ 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して，文章を論理的に読み書きできるようになる

目次

論理式の恒真性

真理値表による恒真性の証明

- 命題論理式：できる
- 述語論理式：できないかもしれない (「無限」に対処できない)

同値変形による恒真性の証明

- 命題論理式：できるかもしれない
- 述語論理式：できるかもしれない

しかし，とても役に立つ

述語論理式に対して同値変形を行うためには，
述語論理における「重要な恒真式」を知る必要がある

述語論理における重要な恒真式 (1)：復習

∀の否定，∃の否定 (重要！) — ド・モルガンの法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次が成り立つ

$$\neg(\forall x \in D\ (P(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D\ (\neg P(x))$$
$$\neg(\exists x \in D\ (P(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D\ (\neg P(x))$$

∀の分配法則，∃の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$，$Q(x)$ に対して，次が成り立つ

$$(\forall x \in D\ (P(x))) \wedge (\forall x \in D\ (Q(x))) \Leftrightarrow \forall x \in D\ (P(x) \wedge Q(x))$$
$$(\exists x \in D\ (P(x))) \vee (\exists x \in D\ (Q(x))) \Leftrightarrow \exists x \in D\ (P(x) \vee Q(x))$$

交換法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して，次が成り立つ

$$\forall x \in D\ (\forall y \in D\ (P(x,y))) \Leftrightarrow \forall y \in D\ (\forall x \in D\ (P(x,y)))$$
$$\exists x \in D\ (\exists y \in D\ (P(x,y))) \Leftrightarrow \exists y \in D\ (\exists x \in D\ (P(x,y)))$$

述語論理における重要な恒真式 (2)：復習

∀の導入，∃の導入

任意の議論領域 D と命題 P に対して，次が成り立つ

$$P \Leftrightarrow \forall x \in D\ (P)$$
$$P \Leftrightarrow \exists x \in D\ (P)$$

注：P の中に x は自由変数として現れない

∀の分配法則，∃の分配法則

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$，命題 Q に対して，次が成り立つ

$$\forall x \in D\ (P(x)) \vee Q \Leftrightarrow \forall x \in D\ (P(x) \vee Q)$$
$$\exists x \in D\ (P(x)) \wedge Q \Leftrightarrow \exists x \in D\ (P(x) \wedge Q)$$

注：Q の中に x は自由変数として現れない

述語論理における重要な恒真式 (3)：復習

束縛変数の変更

任意の議論領域 D と命題関数 $P(x)$ に対して，次が成り立つ

$$\forall x \in D\ (P(x)) \Leftrightarrow \forall y \in D\ (P(y))$$
$$\exists x \in D\ (P(x)) \Leftrightarrow \exists y \in D\ (P(y))$$

注：$P(x)$ の中に y は自由変数として現れず，
$P(y)$ の中に x は自由変数として現れない

目次

同値変形による恒真性の証明：例 1

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x), Q(x)$ に対して
$$\neg(\forall x\,(P(x) \to Q(x))) \Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x))$$

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x\,(P(x) \to Q(x))) &\Leftrightarrow \neg(\forall x\,(\neg P(x) \lor Q(x))) && \text{(実質含意)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(\neg(\neg P(x) \lor Q(x))) && \text{(}\forall\text{ の否定)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(\neg\neg P(x) \land \neg Q(x)) && \text{(ド・モルガンの法則)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \land \neg Q(x)) && \text{(二重否定の除去)}
\end{aligned}$$

□

同値変形による恒真性の証明：例 2

次が成り立つことを証明したい

任意の命題関数 $P(x)$ と命題変数 Q に対して
$$\forall x\,(P(x)) \to Q \Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \to Q)$$

$$\begin{aligned}
\forall x\,(P(x)) \to Q &\Leftrightarrow \neg(\forall x\,(P(x))) \lor Q && \text{(実質含意)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(\neg P(x)) \lor Q && \text{(}\forall\text{ の否定)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(\neg P(x)) \lor \exists x\,(Q) && \text{(}\exists\text{ の導入)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(\neg P(x) \lor Q) && \text{(}\exists\text{ の分配法則)}\\
&\Leftrightarrow \exists x\,(P(x) \to Q) && \text{(実質含意)}
\end{aligned}$$

□

目次

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists x\,(P(x)) \quad や \quad \forall x\,(P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章．読者に伝わるように書く

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

- 記号を使って書くと，集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ に対して
$$\exists x \in A\ (x \text{ は素数である})$$
- A が有限集合なので，
前回のように，$\lor$ を用いて書き直すことで証明できるが，
ここでは (練習のため) 違う方法で証明する

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

格言

証明の基本は「定義に立ち戻る」こと

ある数が素数であることとは何なのか？ 定義を思い出す

素数とは？: 素数の定義

自然数 n が素数であるとは，
それが 1 と n 以外の自然数で割り切れないこと

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

証明：集合 A の要素である 3 を考える．
- 3 は 1 と 3 以外の自然数で割り切れないので，
3 は素数である．
- したがって，A には素数が存在する． □

「〜が存在する」という命題の証明法

1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

集合 $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ には素数が存在する

別証明：集合 A の要素である 7 を考える．
- 7 は 1 と 7 以外の自然数で割り切れないので，7 は素数である．
- したがって，A には素数が存在する． □

「〜が存在する」という命題の証明法
1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

「〜が存在する」という命題の証明法
1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

要求されている性質
- 自然数である
- 3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 である

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

証明：自然数 17 を考える．
- 17 を 3 で割ると，$17 = 5 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．
- 17 を 7 で割ると，$17 = 2 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である．
- したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する． □

疑問点

「17」はどのようにして見つかったのか？

「〜が存在する」という命題の証明法：下書きと清書

格言

証明では「下書き」と「清書」を区別し，証明として書くものは清書のみ

下書き
- 「17」やそれに代わるものを見つける過程を書く
- 確かに，それが要求されている性質を満たすことを確かめる

清書
- 前のページのように，まとまった証明を書く

どうしてそうするのか？
- 「3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する」ことが正しいのかどうか，ということだけが読者の興味の対象
- 証明では，それが確認できさえすればよい

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2 (下書き)

- 「3 で割ると余りが 2 となる自然数」は $3k + 2$ と書ける (ただし，k は非負整数)
- これを 7 で割った余りが 3 となればよい
- $k = 0$ のとき，$3k + 2 = 2$ で，7 で割った余りは 2
- $k = 1$ のとき，$3k + 2 = 5$ で，7 で割った余りは 5
- $k = 2$ のとき，$3k + 2 = 8$ で，7 で割った余りは 1
- $k = 3$ のとき，$3k + 2 = 11$ で，7 で割った余りは 4
- $k = 4$ のとき，$3k + 2 = 14$ で，7 で割った余りは 0
- $k = 5$ のとき，$3k + 2 = 17$ で，7 で割った余りは 3

ということなので，17 を考えればよい

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数が存在する

別証明：自然数 80 を考える．
- 80 を 3 で割ると，$80 = 26 \times 3 + 2$ なので，余りは 2 である．
- 80 を 7 で割ると，$80 = 11 \times 7 + 3$ なので，余りは 3 である．
- したがって，3 で割ると余りが 2 であり，7 で割ると余りが 3 であるような自然数は存在する． □

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

「〜が存在する」という命題の証明法
1. 存在する，といっているものを 1 つ見つけ，「それを考える」と書く．
2. それが要求されている性質を満たすことを論じる (証明する)．

x に要求されている性質
- x は実数である
- $x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす

例題 3：下書き

- 条件「$x^2 - 5x + 6 < 0$」の左辺を変形してみる

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

- よって，$(x - 2)(x - 3) < 0$ となるような x を考えたい
- 「$(x - 2)(x - 3) < 0$」は「$2 < x < 3$」と同値
- なので，2 よりも大きく，3 よりも小さい実数を考えればよい

「〜が存在する」という命題の証明法：例題 3

例題 3：次の命題を証明せよ

$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x が存在する

証明：実数 x として $x = \frac{5}{2}$ を考える.

- このとき,

$$x^2 - 5x + 6 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = -\frac{1}{4} < 0.$$

- したがって，$x^2 - 5x + 6 < 0$ を満たす実数 x は存在する. □

今一度強調

- 選んだものは書く必要がある (この場合は，$\frac{5}{2}$)
- $\frac{5}{2}$ がどのように出てきたのかは書く必要がない

嘉田 勝「証明を理解するための考え方」を参照

(数学セミナー 2009 年 5 月号，http://www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/~kada/susemi0905/)

目次

今から行うこと

具体的に与えられた命題関数 $P(x)$ に対して

$$\exists\, x\, (P(x)) \quad \text{や} \quad \forall\, x\, (P(x))$$

が正しいことを証明すること

証明とは？

命題が正しいことを論理的に説明する文章

格言

証明は文章．読者に伝わるように書く

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法：例題 1

例題 1：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$x^2 + 1 \geq 2x$ である

証明：任意の実数 x を考える

- 左辺 − 右辺 $= x^2 + 1 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$.
- したがって，$x^2 + 1 \geq 2x$ である. □

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法

1. 「任意の〜を考える」で始め,「したがって，…である」で終わる
2. それが「…である」という性質を満たすことを確認する (証明する)

「任意の〜に対して…である」という命題の証明法：例題 2

例題 2：次の命題を証明せよ

任意の実数 x に対して，$(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である

証明：任意の実数 x を考える.

- $$\begin{aligned}(1+x)^3 + (1-x)^3 &= (1 + 3x + 3x^2 + x^3) + (1 - 3x + 3x^2 - x^3)\\ &= 6x^2 + 2.\end{aligned}$$
- したがって，$(1+x)^3 + (1-x)^3 = 6x^2 + 2$ である. □

目次

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して，$a+b$ は 2 で割り切れる

正しい場合は
- 先ほどのように証明する

正しくない場合は
- その命題の否定を証明する (反例を挙げる)

$\forall$ の否定 (重要！) — ド・モルガンの法則

$$\neg(\forall\, x \in D\ (P(x))) \Leftrightarrow \exists\, x \in D\ (\neg P(x))$$

上の命題の否定

ある異なる素数 a, b が存在して，$a+b$ は 2 で割り切れない

反例：$a+b$ が 2 で割り切れないような，異なる素数 a, b

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 1

例題 1：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の異なる素数 a, b に対して，$a+b$ は 2 で割り切れる

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．
- 異なる素数 $a=2$, $b=3$ を考える．
- このとき，$a+b=2+3=5$ であり，これは 2 で割り切れない． □

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して，$x^2 > 0$ である

上の命題の否定

ある実数 x に対して，$x^2 > 0$ ではない

反例：$x^2 > 0$ ではないような実数 x

注意

正しいか正しくないかの見通しは，下書きに書く

「任意の〜に対して…である」という命題の否定の証明法：例題 2

例題 2：次の命題は正しいか，正しくないか

任意の実数 x に対して，$x^2 > 0$ である

解答：これは正しくない．その理由は以下の通りである．
- 実数 $x=0$ を考える．
- このとき，$x^2=0$ であり，$x^2>0$ にはならない． □

目次

今日のまとめ

今日の目標
- 述語論理式の同値変形を用いて恒真性の証明ができるようになる
- ∃や∀を含む命題の証明を文章として書けるようになる

なぜ証明を勉強するのか？
- 証明は論理的思考の根幹 $\rightsquigarrow$ 論理的思考の訓練
- 証明は文章 (主張) $\rightsquigarrow$ 文章構造と論理構造の対応に注目

これを通して，文章を論理的に読み書きできるようになる