

離散数学 第2回  
集合と論理 (2) : 集合と論理の対応

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016年4月22日

最終更新 : 2016年4月20日 08:35

スケジュール 後半 (予定)

- 8 写像 (1) : 像と逆像 (6月17日)
- 9 写像 (2) : 全射と単射 (6月24日)
- 10 関係 (1) : 関係 (7月1日)
- 11 関係 (2) : 同値関係 (7月8日)
- 12 関係 (3) : 順序関係 (7月15日)
- 13 証明法 (4) : 数学的帰納法 (7月22日)
- 14 集合と論理 (5) : 集合の再帰的定義 (7月29日)
  - 期末試験 (8月5日?)

注意 : 予定の変更もありうる

集合に対する操作

目次

- 1 集合に対する操作
- 2 恒真式
- 3 同値変形 : 真理値表を使わない恒真性の証明
- 4 集合に関する等式と論理
- 5 今日のまとめ

集合に対する操作

合併

合併とは?

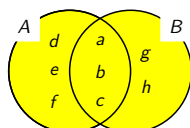
集合  $A, B$  の合併を  $A \cup B$  と表記し,  

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

で定義する

- 例 :
- ▶  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
  - ▶  $B = \{a, b, c, g, h\}$  のとき,
  - ▶  $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

オイラー図



「合併」は「和集合」、「結び」とも呼ばれる

スケジュール 前半 (予定)

- \* 休講 (4月8日)
- 1 集合と論理 (1) : 命題論理 (4月15日)
- 2 集合と論理 (2) : 集合と論理の対応 (4月22日)
- \* 昭和の日 (4月29日)
- 3 集合と論理 (3) : 述語論理 (5月6日)
- 4 証明法 (1) :  $\exists$ と $\forall$ を含む命題の証明 (5月13日)
- 5 証明法 (2) : 含意を含む命題の証明 (5月20日)
- 6 証明法 (3) : 集合に関する証明 (5月27日)
- 7 集合と論理 (4) : 直積と冪集合 (6月3日)
  - 中間試験 (6月10日)

注意 : 予定の変更もありうる

今日の概要

今日の目標

- ▶ 集合に対する操作を理解し, 使える
- ▶ 真理値表により命題の恒真性を証明できる
- ▶ 同値変形により命題の恒真性を証明できる
- ▶ 集合に対する等式を同値変形によって証明できる

注意

次の3つを明確に区別する

- ▶ 集合に対する操作
- ▶ 論理に対する操作
- ▶ 実数に対する操作

これら3つに対する法則や記法は異なる

集合に対する操作

共通部分

共通部分とは?

集合  $A, B$  の共通部分を  $A \cap B$  と表記し,  

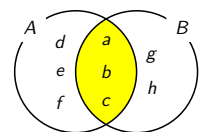
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

で定義する

例 :

- ▶  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- ▶  $B = \{a, b, c, g, h\}$  のとき,
- ▶  $A \cap B = \{a, b, c\}$

オイラー図



「共通部分」は「積集合」、「交わり」とも呼ばれる

集合に対する操作

集合差

集合差とは?

集合  $A, B$  に対して, 集合差  $A - B$  を  

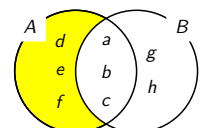
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

で定義する

例 :

- ▶  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$
- ▶  $B = \{a, b, c, g, h\}$  のとき,
- ▶  $A - B = \{d, e, f\}$

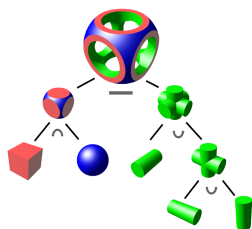
オイラー図



「 $A - B$ 」の代わりに「 $A \setminus B$ 」と書くこともある

Constructive Solid Geometry

単純な物体に対して集合演算を適用することで、複雑な物体を表現するコンピュータ・グラフィックスの技法



http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Csg\_tree.png

例えば、POV-Rayでも標準的に使える

恒真式

目次

- ① 集合に対する操作
- ② 恒真式
- ③ 同値変形：真理値表を使わない恒真性の証明
- ④ 集合に関する等式と論理
- ⑤ 今日のまとめ

恒真式

恒真式に対する記法

含意を含む恒真式

- ▶ 「 $P \rightarrow Q$ 」が恒真であるとき、これを次のように書く  
 $P \Rightarrow Q$
- ▶ 「 $P \Rightarrow Q$ 」において、次の用語を使うことがある
  - ▶  $P$ は「 $Q$ が成り立つための**十分条件**」
  - ▶  $Q$ は「 $P$ が成り立つための**必要条件**」

同値を含む恒真式

- ▶ 「 $P \Leftrightarrow Q$ 」が恒真であるとき、これを次のように書く  
 $P \Leftrightarrow Q$
- ▶ 「 $P \Leftrightarrow Q$ 」において、次の用語を使うことがある
  - ▶  $P$ を「 $Q$ が成り立つための**必要十分条件**」
  - ▶  $Q$ を「 $P$ が成り立つための**必要十分条件**」

恒真式

重要な恒真式：実質含意 (例)

実質含意 (含意の書換)

任意の命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ  
 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

例：「コインを投げて表が出たら、100円もらえる」という遊び

- ▶  $P$  = 「コインを投げて表が出た」
- ▶  $Q$  = 「100円もらえる」
- ▶  $P \rightarrow Q$  = 「コインを投げて表が出たら、100円もらえる」
- ▶  $\neg P \vee Q$  = 「コインを投げて表が出なかったか、そうでなければ、100円もらえる」

まとめの表

命題論理	集合
$\wedge$	$\cap$
$\vee$	$\cup$

つまり

- ▶ 命題  $P, Q$  に対して「 $P \cap Q$ 」と書いてはいけない!
- ▶ 集合  $A, B$  に対して「 $A \wedge B$ 」と書いてはいけない!

恒真式

恒真式

恒真式 (トートロジー) とは?

命題変数にどのような真理値が割り当てられても、常に真となる命題論理式

例：「 $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$ 」は恒真式

$P$	$Q$	$Q \rightarrow P$	$P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T

恒真式

重要な恒真式：実質含意

実質含意 (含意の書換)

任意の命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ  
 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

証明：次の真理値表の正しさによる。

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

証明終了のしるし □

恒真式

重要な恒真式：実質同値

実質同値 (同値の書換)

任意の命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ  
 $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

証明：次の真理値表の正しさによる。

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

証明終了のしるし □

## 重要な恒真式：排中法則

## 排中法則

命題変数  $P$  に対して、次の命題論理式は恒真式  

$$P \vee \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる。

$P$	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

□

## 重要な恒真式：排中法則 (例)

## 排中法則

命題変数  $P$  に対して、次の命題論理式は恒真式  

$$P \vee \neg P$$

例

- ▶  $P =$  「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」のとき
- ▶  $P \vee \neg P =$  「愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか、または、愛媛県の県庁所在地は宇和島市ではない」

## 重要な恒真式：ド・モルガンの法則

## ド・モルガンの法則 (特に重要)

命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \end{aligned}$$

証明：次の真理値表の正しさによる。

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(\neg(P \vee Q)) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T	T

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T

□

## 重要な恒真式：ド・モルガンの法則 (例)

## ド・モルガンの法則 (特に重要)

命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ

$$\begin{aligned} \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ \text{OR の NOT} &\quad \text{NOT の AND} \\ \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \\ \text{AND の NOT} &\quad \text{NOT の OR} \end{aligned}$$

例

- ▶  $P =$  「愛媛県の県庁所在地は宇和島市である」
- ▶  $Q =$  「愛媛県の県庁所在地は松山市である」のとき
- ▶  $\neg(P \vee Q) =$  「『愛媛県の県庁所在地は宇和島市であるか、松山市である』ということではない」
- ▶  $\neg P \wedge \neg Q =$  「愛媛県の県庁所在地は宇和島市ではない、かつ、愛媛県の県庁所在地は松山市ではない」

## Augustus De Morgan (1806–1871)

オーガスタス・ド・モルガン、インド生まれのイギリスの数学者



[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De\\_Morgan\\_Augustus.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:De_Morgan_Augustus.jpg)

## 重要な恒真式：対偶法則

## 対偶法則

任意の命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

証明：次の真理値表の正しさによる。

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

□

## 重要な恒真式：対偶法則

## 対偶法則

任意の命題変数  $P, Q$  に対して、次が成り立つ

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

例：「コインを投げて表が出たら、100円もらえる」という遊び

- ▶  $P \rightarrow Q =$  「コインを投げて表が出たら、100円もらえる」
- ▶  $\neg Q \rightarrow \neg P =$  「100円もらえないならば、コインを投げて表が出ていなかった」

## 恒真式いろいろ (1)

## 幂等法則

$$\begin{aligned} P \wedge P &\Leftrightarrow P \\ P \vee P &\Leftrightarrow P \end{aligned}$$

## 交換法則

$$\begin{aligned} P \wedge Q &\Leftrightarrow Q \wedge P \\ P \vee Q &\Leftrightarrow Q \vee P \end{aligned}$$

## 吸収法則

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \vee P &\Leftrightarrow P \\ (P \vee Q) \wedge P &\Leftrightarrow P \end{aligned}$$

## 二重否定の除去

$$P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$$

## 同一法則

$$\begin{aligned} P \wedge T &\Leftrightarrow P \\ P \vee F &\Leftrightarrow P \end{aligned}$$

## 支配法則

$$\begin{aligned} P \wedge F &\Leftrightarrow F \\ P \vee T &\Leftrightarrow T \end{aligned}$$

## 結合法則

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \wedge R &\Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R) \\ (P \vee Q) \vee R &\Leftrightarrow P \vee (Q \vee R) \end{aligned}$$

## 分配法則

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \wedge R &\Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \\ (P \wedge Q) \vee R &\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \\ P \wedge (Q \vee R) &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned}$$

## 含意の合成

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \wedge R)$$

## 三段論法

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

## 目次

- ① 集合に対する操作
- ② 恒真式
- ③ 同値変形：真理値表を使わない恒真性の証明
- ④ 集合に関する等式と論理
- ⑤ 今日のまとめ

## 同値変形とは？

## 同値変形とは？

論理式の一部として現れる論理式をそれと同値な論理式で置き換えること

先ほどの「重要な恒真式」と「恒真式いろいろ」の同値性が見える！

- ▶ 実質含意, 実質同値
- ▶ 排中法則
- ▶ ド・モルガンの法則
- ▶ 対偶法則
- ▶ 冪等法則
- ▶ 二重否定の除去
- ▶ (吸収法則)
- ▶ 交換法則, 結合法則
- ▶ 分配法則
- ▶ 同一法則, 支配法則

## 重要な性質

同値変形によって恒真性は保たれる

## 目次

- ① 集合に対する操作
- ② 恒真式
- ③ 同値変形：真理値表を使わない恒真性の証明
- ④ 集合に関する等式と論理
- ⑤ 今日のまとめ

- ▶ 恒真式を使って, 命題論理式を簡略化できる (見た目を単純にできる)
- ▶ 恒真式を使って, 数学的な証明ができる

これらについては次に扱う…

## 同値変形とは？: 例

## 次が成り立つことを証明したい

$$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)$$

先ほどの「重要な恒真式」と「恒真式いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &\Leftrightarrow (P \wedge P) \wedge (Q \wedge R) && (\wedge \text{の冪等法則}) \\ &\Leftrightarrow P \wedge (P \wedge (Q \wedge R)) && (\wedge \text{の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow P \wedge ((P \wedge Q) \wedge R) && (\wedge \text{の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge (P \wedge Q)) \wedge R && (\wedge \text{の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge P) \wedge R && (\wedge \text{の交換法則}) \\ &\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (P \wedge R) && (\wedge \text{の結合法則}) \end{aligned}$$

□

## 同値変形とは？: 例 2

## 次が成り立つことを証明したい

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

先ほどの「重要な恒真式」と「恒真式いろいろ」を見ながら

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \rightarrow R &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R && (\text{実質含意}) \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \vee R && (\text{ド・モルガンの法則}) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) && (\vee \text{の結合法則}) \\ &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \rightarrow R) && (\text{実質含意}) \\ &\Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R) && (\text{実質含意}) \end{aligned}$$

□

## 集合に対する操作と論理に対する操作の対応

## まとめ：集合と論理に対する操作の対応

集合  $A, B$  に対して

集合	論理
$x \in A \cap B$	$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$
$x \in A \cup B$	$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$
$x \in A - B$	$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$
	$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$

## 注意

- ▶  $A, B, A \cap B, A \cup B, A - B$  は集合
- ▶  $x \in A, x \in B, x \in A \cap B, x \in A \cup B, x \in A - B$  は命題 (真偽が決まる)

集合に対する等号と論理に対する同値の対応

まとめ：集合と論理に対する操作の対応

集合  $A, B$  に対して

<b>集合</b>	<b>論理</b>
$A = B$	$x \in A \leftrightarrow x \in B$

帰結

論理の同値変形を用いることで、集合に対する等式を証明できる

集合に関する等式：例 — 証明

例題

集合  $A, B, C$  に対する次の等式を証明せよ

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

証明：

$$x \in A - (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \cap C) \quad (\text{集合差の定義})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \quad (\text{共通部分の定義})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \quad (\text{ド・モルガンの法則})$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge \neg(x \in C)) \quad (\text{分配法則})$$

目次

- ① 集合に対する操作
- ② 恒真式
- ③ 同値変形：真理値表を使わない恒真性の証明
- ④ 集合に関する等式と論理
- ⑤ 今日のまとめ

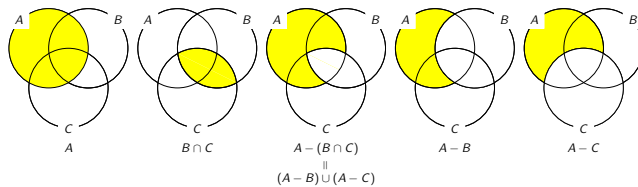
集合に関する等式：例

例題

集合  $A, B, C$  に対する次の等式を証明せよ

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

証明の前に、オイラー図による直感



目標：次を証明する

$$x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$$

集合に関する等式：例 — 証明 (続き)

例題

集合  $A, B, C$  に対する次の等式を証明せよ

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

証明 (続き)：

$$x \in A - (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge \neg(x \in C))$$

$$\Leftrightarrow (x \in A - B) \vee (x \in A - C) \quad (\text{集合差の定義})$$

$$\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C) \quad (\text{合併の定義})$$

□

今日のまとめ

今日の目標

- ▶ 集合に対する操作を理解し、使える
- ▶ 真理値表により命題の恒真性を証明できる
- ▶ 同値変形により命題の恒真性を証明できる
- ▶ 集合に対する等式を同値変形によって証明できる

注意

次の3つを明確に区別する

- ▶ 集合に対する操作
- ▶ 論理に対する操作
- ▶ 実数に対する操作

これら3つに対する法則や記法は異なる