

13:00-14:30. A4用紙(両面自筆書き込み)のみ持ち込み可. 使用可能な解答用紙は1枚のみ.
携帯電話, タブレット等は電源を切ってカバンの中に入れておくこと.

採点終了次第, 講義 web ページにて, 得点分布, 講評などを掲載する.

採点結果を知りたい場合は, 解答用紙右上「評点」欄の中に5文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと(その文字列は控えておくように).

採点終了後, そのランダム文字列と得点の対応表を公開する.

問題 1 集合 A, B を

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{4, 5, 6\}$$

と定義し, 写像 $f: A \rightarrow B$ を

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 6, \quad f(3) = 4$$

で定義する. このとき, 次の集合は何になるか?
その要素をすべて並べること(外延的定義)により答えよ.

1. $f(\{2, 3\})$.
2. $f^{-1}(\{4, 5\})$.
3. $A \times B$.
4. A^2 .
5. 2^B , すなわち, B の冪集合.

問題 2 任意の集合 A, B , 任意の写像 $f: A \rightarrow B$, 任意の部分集合 $Y, Y' \subseteq B$ に対して

$$Y \subseteq Y' \quad \text{ならば} \quad f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

となることを証明せよ.

問題 3 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ に対して, 写像 $g \circ f$ が単射であるならば, f も単射であることを証明せよ.

問題 4 任意の正の整数 n に対して, a_n を

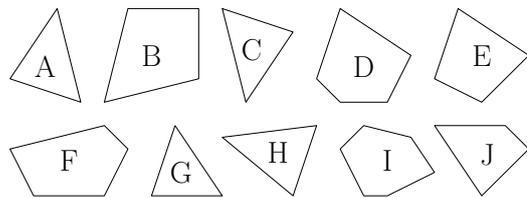
$$a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する. 任意の正整数 n に対して

$$|a_n| \leq 3$$

が成り立つことを証明せよ. ただし, $|a_n|$ は a_n の絶対値を表す. (ヒント: $n = 1, 2, \dots, 15$ のとき, a_n の値が何になるのか観察してみよ.)

問題 5 次に示す平面上の凸多角形 A, \dots, J から構成される集合を S とする. 集合 S 上の関係 \sim を次のように定義する. すなわち, 任意の $P, Q \in S$ に対して, $P \sim Q$ であることを P と Q の頂点数が等しいこととする. 以下の問いに答えよ.



1. この関係 \sim が同値関係であることを証明せよ.
2. 商集合 S / \sim が何であるか, その要素をすべて並べること(外延的定義)により答えよ. また, 商集合の要素数 $|S / \sim|$ が何であるかも答えよ.

問題 6 集合 $K = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ は自然数 36 の約数をすべて集めて作ったものである. 正整数 a, b に対して, $a | b$ を「 a が b の約数である」ことと定義する.

1. 半順序集合 $(K, |)$ のハッセ図を描け. (理由を添える必要はない.)
2. 半順序集合 $(K, |)$ に対して, 次の問いに答えよ. ただし, 該当するものが存在しない場合は「存在しない」と答えよ. (いずれの場合も理由を添える必要はない.)
 - (a) $\{4, 6\}$ の上界をすべて挙げよ.
 - (b) $\{4, 6, 18\}$ の極大元をすべて挙げよ.
 - (c) $\{4, 6\}$ の下限をすべて挙げよ.