離散数学 (9) **2016 年 6 月 24 日**
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2016 年 7 月 1 日 講義終了時

復習問題 9.1 集合 $A = \{1,2,3,4\}, B = \{1,2,3\}$ に対して，次で定義される各写像が (a) 全射であるか，(b) 単射であるか，(c) 全単射であるか，理由も付けて答えよ．

1. $f_1 \colon A \to B$ で，$f_1(1) = 1$，$f_1(2) = 3$，$f_1(3) = 1$，$f_1(4) = 3$.
2. $f_2 \colon A \to B$ で，$f_2(1) = 3$，$f_2(2) = 1$，$f_2(3) = 3$，$f_2(4) = 2$.
3. $f_3 \colon B \to A$ で，$f_3(1) = 2$，$f_3(2) = 4$，$f_3(3) = 2$.
4. $f_4 \colon B \to A$ で，$f_4(1) = 2$，$f_4(2) = 1$，$f_4(3) = 3$.
5. $f_5 \colon B \to B$ で，$f_5(1) = 2$，$f_5(2) = 2$，$f_5(3) = 1$.
6. $f_6 \colon B \to B$ で，$f_6(1) = 3$，$f_6(2) = 1$，$f_6(3) = 2$.

復習問題 9.2 写像 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = 3a+1$ であるとして定義する．

1. 写像 f が全射であることを証明せよ．
2. 写像 f が単射であることを証明せよ．
3. 写像 f の逆写像 $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が何であるか，答えよ．

復習問題 9.3 写像 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する．

1. 写像 f が全射ではないことを証明せよ．
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ．

補足問題 9.4 実数の集合 $A, B \subseteq \mathbb{R}$ に対して，写像 $f \colon A \to B$ を任意の $a \in A$ に対して $f(a) = a^2$ であるとして定義する．以下のように A と B を定めるとき，写像 f が (a) 全射であるか，(b) 単射であるか，(c) 全単射であるか，理由も付けて答えよ．そして，(d) 全単射である場合は，その逆写像が何であるか，理由も付けて答えよ．

1. $A = \mathbb{R}$，$B = [0, \infty)$.
2. $A = [0, \infty)$，$B = [0, \infty)$.
3. $A = [0, 1]$，$B = [0, \infty)$.

補足問題 9.5 任意の集合 A, B と任意の写像 $f \colon A \to B$ を考える．このとき，f が全単射であるならば，f の逆写像が存在することを証明せよ．(ヒント：まず，「任意の $b \in B$ に対して，$b = f(a)$ を満たす $a \in A$ が ただ一つ 存在する」ことを証明せよ．)

補足問題 9.6 この演習問題の目標は，任意の集合 A, B と任意の写像 $f \colon A \to B$ に対して，f の逆写像が存在するとき，f が全単射であることを証明することである．次の流れに沿って証明を行ってみよ．

1. 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f \colon A \to B$，$g \colon B \to C$ に対して，写像 $g \circ f$ が全射であるならば，g も全射であることを証明せよ．
2. 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f \colon A \to B$，$g \colon B \to C$ に対して，写像 $g \circ f$ が単射であるならば，f も単射であることを証明せよ．
3. 任意の集合 A, B と任意の写像 $f \colon A \to B$ に対して，f の逆写像が存在するならば，f が全単射であることを証明せよ．

補足問題 9.7 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f \colon A \to B$ と任意の写像 $g \colon B \to A$ を考える．このとき，g が f の逆写像であることと $g \circ f = \mathrm{id}_A$ が成り立つことが同値であることを証明せよ．(ヒント：「$g \circ f = \mathrm{id}_A$ が成り立つとき，g が f の逆写像である」ことを証明するとき，f が全射であるという性質を利用せよ．)

補足問題 9.8 任意の集合 A, B と任意の全単射 $f \colon A \to B$ と任意の写像 $g \colon B \to A$ を考える．このとき，g が f の逆写像であることと $f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つことが同値であることを証明せよ．(ヒント：「$f \circ g = \mathrm{id}_B$ が成り立つとき，g が f の逆写像である」ことを証明するとき，f が単射であるという性質を利用せよ．)

補足問題 9.9 任意の集合 A, B と任意の写像 $f\colon A \to B$ を考える．写像 f が全単射であるとき，その逆写像 f^{-1} も全単射であることを証明せよ．

追加問題 9.10 次のそれぞれの写像が (a) 全射であるか，(b) 単射であるか，(c) 全単射であるか，理由も付けて答えよ．そして，(d) 全単射である場合は，その逆写像が何であるか，理由も付けて答えよ．

1. $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_1(a) = a^3$.
2. $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f_2(a) = 2^a$.
3. $f_3\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ で，任意の $a \in \mathbb{Z}$ に対して，$f_3(a) = 2a+1$．(ただし，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合を表す．)
4. $f_4\colon \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$ で，任意の $a \in \{-1, 0, 1\}$ に対して，$f_4(a) = a(a-1)(a+1)$.

追加問題 9.11 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ に対して，f と g が全射であるとき，$g \circ f$ も全射であることを証明せよ．

追加問題 9.12 任意の集合 A, B, C と任意の写像 $f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ に対して，f と g が単射であるとき，$g \circ f$ も単射であることを証明せよ．

追加問題 (発展) 9.13 任意の集合 A, B と任意の写像 $f\colon A \to B$ を考える．このとき，f が全射であるとき，そのときに限り，任意の $Y \subseteq B$ に対して $Y = f(f^{-1}(Y))$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 (発展) 9.14 任意の集合 A, B と任意の写像 $f\colon A \to B$ を考える．このとき，f が単射であるとき，そのときに限り，任意の $X \subseteq A$ に対して $X = f^{-1}(f(X))$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 (発展) 9.15 1 つ以上の整数の集合 $X \subseteq \mathbb{Z}$ に対して，X の要素である整数の中で最も小さいものを $\min X$ と表すことにする．例えば，$X = \{-3, 0, 2\}$ であるとき，$\min X = -3$ である．

写像 $f\colon 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$ を，任意の $X \in 2^{\mathbb{Z}}$ に対して

$$f(X) = \begin{cases} X - \{\min X\} & (X \neq \emptyset \text{ のとき}), \\ \emptyset & (X = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

であると定義する．以下の問いに答えよ．

1. 写像 f が全射であることを証明せよ．
2. 写像 f が単射ではないことを証明せよ．

(注意 : 発展問題であるが，何を問われているのか理解することが難しいかもしれない．何を問われているのか理解できれば，証明自体は難しくない．)