

提出締切：2016年6月24日 講義終了時

**復習問題 8.1** 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{6, 7, 8\}$  に対して, 写像  $f: A \rightarrow B$  を  $f(1) = 6, f(2) = 6, f(3) = 7, f(4) = 7, f(5) = 8$  で定義する. このとき, 次の集合は何になるか? その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ.

- |                          |                             |
|--------------------------|-----------------------------|
| 1. $f(\{1, 2\})$ .       | 2. $f(\{1, 2, 3\})$ .       |
| 3. $f(\{1, 2, 3, 4\})$ . | 4. $f(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ . |
| 5. $f(\{2\})$ .          | 6. $f^{-1}(\{6\})$ .        |
| 7. $f^{-1}(\{6, 7\})$ .  | 8. $f^{-1}(\{6, 7, 8\})$ .  |
| 9. $f^{-1}(\{7, 8\})$ .  | 10. $f^{-1}(\{6, 8\})$ .    |

**復習問題 8.2** 集合  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{8, 9\}$  に対して, 写像  $f: A \rightarrow B$  を  $f(1) = 5, f(2) = 4, f(3) = 7$  で, 写像  $g: B \rightarrow C$  を  $g(4) = 8, g(5) = 9, g(6) = 9, g(7) = 8$  で定義する. このとき,  $g \circ f: A \rightarrow C$  はどのような写像であるか? すべての  $a \in A$  に対して  $(g \circ f)(a)$  が何であるか定めよ.

**復習問題 8.3** 任意の集合  $A, B$ , 任意の写像  $f: A \rightarrow B$ , 任意の集合  $X, X' \subseteq A$  に対して,

$$X \subseteq X' \quad \text{ならば} \quad f(X) \subseteq f(X')$$

となることを証明せよ.

**追加問題 8.4** 集合  $A, B, C$  を  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ,  $C = \{8, 9, 10\}$  と定義する. 写像  $f: A \rightarrow B$  を  $f(1) = 5, f(2) = 5, f(3) = 6$  で定義する. 写像  $g: B \rightarrow C$  を  $g(4) = 8, g(5) = 8, g(6) = 9, g(7) = 10$  で定義する. このとき, 次の集合がそれぞれ何であるか, その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ.

- |                         |                               |
|-------------------------|-------------------------------|
| 1. $f(\{1, 2, 3\})$ .   | 2. $f(\{1, 2\})$ .            |
| 3. $g(\{4, 5, 6\})$ .   | 4. $g(\{5, 6, 7\})$ .         |
| 5. $f^{-1}(\{4, 5\})$ . | 6. $f^{-1}(\{4, 5, 6, 7\})$ . |

- |                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| 7. $g^{-1}(\{8, 9\})$ .    | 8. $g^{-1}(\{8, 9, 10\})$ .      |
| 9. $f^{-1}(f(\{1, 3\}))$ . | 10. $f^{-1}(g^{-1}(\{8, 9\}))$ . |
| 11. $f(\emptyset)$ .       | 12. $g^{-1}(\emptyset)$ .        |

**追加問題 8.5** 任意の集合  $A, B$ , 任意の写像  $f: A \rightarrow B$ , 任意の部分集合  $X, X' \subseteq A$  に対して

$$f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$$

が成り立つことを証明せよ.

**追加問題 8.6** 任意の集合  $A, B$ , 任意の写像  $f: A \rightarrow B$ , 任意の部分集合  $Y, Y' \subseteq B$  に対して

$$Y \subseteq Y' \quad \text{ならば} \quad f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$$

となることを証明せよ.

**追加問題 8.7** 任意の集合  $A, B$ , 任意の写像  $f: A \rightarrow B$ , 任意の部分集合  $X \subseteq A$  に対して

$$X \subseteq f^{-1}(f(X))$$

が成り立つことを証明せよ.

**追加問題 8.8** 任意の集合  $A, B, C$ , 任意の写像  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , 任意の集合  $Z \subseteq C$  に対して,

$$(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 直感を得るためには, まず, この両辺に書かれている集合が  $A, B, C$  の中のどれの部分集合であるのか, 判定せよ. 証明を書き下す際には,  $(g \circ f)^{-1}(Z) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(Z))$  と  $f^{-1}(g^{-1}(Z)) \subseteq (g \circ f)^{-1}(Z)$  を別々に証明すればよい.)

**追加問題 (発展) 8.9** 任意の集合  $A, B, C$ , 任意の写像  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ , 任意の集合  $X \subseteq A$ ,  $Z \subseteq C$  に対して,

$$f(X) \subseteq g^{-1}(Z) \quad \text{ならば} \quad (g \circ f)(X) \subseteq Z$$

が成り立つことを証明せよ. (ヒント: 変数の作用域 (スコープ) に注意.)