離散数学 (7) **2016 年 6 月 3 日**

演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2016 年 6 月 17 日 講義終了時

復習問題 7.1 集合 A を次のように定めるとき，A の要素数 $|A|$ はそれぞれ何であるか，答えよ．

1. $A = \{a, c, t\}$.
2. $A = \emptyset$.

復習問題 7.2 30 人に対してあるアンケートを行った結果が以下の通りであった．なお，アンケートのすべての項目に 30 人全員が回答した．

- 30 人中，6 人は愛媛県に行ったことがある
- 30 人中，10 人はディズニーランドに行ったことがある
- 30 人中，19 人は愛媛県にもディズニーランドにも行ったことがない

このとき，愛媛県とディズニーランドの両方に行ったことがある人は 30 人中何人か？

復習問題 7.3 集合 A, B を $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $A \times B$.
2. $B \times A$.

復習問題 7.4 集合 A, B, C を $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$, $C = \{4, 5\}$ と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $A \times B$.
2. $B \times A$.
3. $A \times B \times C$.
4. $(A \times B) \times C$.
5. $A \times (B \times C)$.

復習問題 7.5 集合 A を次のように定めるとき，2^A はそれぞれ何になるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $A = \{a, b, c\}$.
2. $A = \{a\}$.
3. $A = \emptyset$.
4. $A = \{\emptyset\}$.

復習問題 7.6 任意の集合 A, B, C に対して

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 7.7 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の集合 A, B に対して，$A \subseteq B$ ならば，$2^A \subseteq 2^B$ が成り立つ．

補足問題 7.8 この問の目標は，有限集合 A, B に対して，$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ が成り立つことを証明することである．次の流れに沿って証明せよ．

1. 任意の命題変数 P, Q に対して，$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ が成り立つことを証明せよ．(真理値表による証明と同値変形による証明のどちらでも構わない．)
2. 上の小問の結果を用いて，任意の集合 A, B に対して，$(A - B) \cup (A \cap B) = A$ が成り立つことを証明せよ．
3. 任意の命題変数 P, Q に対して，$(P \wedge \neg Q) \wedge (P \wedge Q) \Leftrightarrow \mathsf{F}$ が成り立つことを証明せよ．(真理値表による証明と同値変形による証明のどちらでも構わない．)
4. 上の小問の結果を用いて，任意の集合 A, B に対して，$(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$ が成り立つことを証明せよ．
5. 任意の命題変数 P, Q に対して，$P \vee Q \Leftrightarrow P \vee (Q \wedge \neg P)$ が成り立つことを証明せよ．(真理値表による証明と同値変形による証明のどちらでも構わない．)
6. 上の小問の結果を用いて，任意の集合 A, B に対して，$A \cup B = A \cup (B - A)$ が成り立つことを証明せよ．
7. 以上を踏まえて，有限集合 A, B に対して，$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 7.9 この問の目標は，有限集合 A, B に対して，$B \subseteq A$ ならば，$|A - B| = |A| - |B|$ となることを証明することである．

1. $B \subseteq A$ ならば，$A \cap B = B$ が成り立つことを証明せよ．
2. 任意の命題 P, Q に対して，$P \Rightarrow P \vee Q$ が成り立つことを証明せよ．
3. $B \subseteq A$ ならば，$A \cup B = A$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：$A \cup B = A$ を証明するためには，$A \cup B \subseteq A$ と $A \subseteq A \cup B$ の両方を証明すればよい．$A \cup B \subseteq A$ を証明するために，背理法を用いてみよ．)
4. 以上を踏まえて，$|A - B| = |A| - |B|$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：包除原理．)

追加問題 7.10 集合 A, B を $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ と定義するとき，次の集合がそれぞれ何であるか，その要素をすべて並べること (外延的定義) により答えよ．

1. $A \times B$.
2. A^2.
3. $2^A \cap 2^B$.
4. $2^A \cup 2^B$.
5. $A \times \emptyset$.
6. $\emptyset \times B$.

追加問題 7.11 1 以上 100 以下の自然数の中で，2 の倍数でも 3 の倍数でもないものはいくつあるか？答えよ．

追加問題 7.12 任意の集合 A, B, C に対して，$(A \cap (C - B)) \times (B \cap (C - A)) = (A \times B) \cap ((C - B) \times (C - A))$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 7.13 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の集合 A, B, C に対して，$A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ が成り立つ．

追加問題 (発展) 7.14 次の命題は正しいか，正しくないか．理由も付けて答えよ．

> 任意の集合 A, B, C に対して，$A \times C = B \times C$ ならば $A = B$ である．

追加問題 7.15 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の集合 A, B に対して，$2^A \subseteq 2^B$ ならば，$A \subseteq B$ が成り立つ．

追加問題 7.16 次の命題は正しいか，正しくないか，理由も付けて答えよ．

> 任意の集合 A, B, C, D に対して，$A \subseteq C$ かつ $B \subseteq D$ ならば，$A \times B \subseteq C \times D$ が成り立つ．

(ヒント：証明すべき目標を見定めて，集合の要素を表す記号を工夫せよ．)