

提出締切：2016年5月13日 講義終了時

復習問題 3.1 集合 A を $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ と定める。このとき、以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall n \in A$ (n は自然数である).
2. $\forall n \in A$ (n は偶数である).
3. $\exists n \in A$ (n は偶数である).
4. $\exists n \in A$ (n は自然数である).
5. $\exists n \in A$ (n は素数である).
6. $\exists n \in A$ (n は負の数である).

復習問題 3.2 集合 A を $A = \{1, 2\}$ と定める。このとき、以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall m \in A$ ($\forall n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
2. $\exists m \in A$ ($\forall n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
3. $\forall m \in A$ ($\exists n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).
4. $\exists m \in A$ ($\exists n \in A$ ($m + n$ は偶数である)).

補足問題 3.3 議論領域 D と命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ に対して、次の論理式を考える。このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ。

1. $(\forall x \in D (P(x)) \wedge \forall x \in D (Q(x)))$
 $\leftrightarrow \forall x \in D (P(x) \wedge Q(x)).$
2. $(\exists x \in D (P(x)) \vee \exists x \in D (Q(x)))$
 $\leftrightarrow \exists x \in D (P(x) \vee Q(x)).$

証明は、真理値表を用いて行ってもよいし、同値変形によって行ってもよい。

補足問題 3.4 議論領域 D と命題関数 $P(x, y)$ に対して、次の論理式を考える。このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ。

1. $\forall x \in D$ ($\forall y \in D (P(x, y))$)
 $\leftrightarrow \forall y \in D$ ($\forall x \in D (P(x, y))$).

2. $\exists x \in D$ ($\exists y \in D (P(x, y))$)
 $\leftrightarrow \exists y \in D$ ($\exists x \in D (P(x, y))$).

証明は、真理値表を用いて行ってもよいし、同値変形によって行ってもよい。

補足問題 3.5 議論領域 D と命題 P に対して、次の論理式を考える。ただし、 P の中に x は自由変数として現れないものとする。このそれぞれが $D = \{a, b\}$ のときに恒真式となることを証明せよ。

1. $P \leftrightarrow \forall x \in D (P).$
2. $P \leftrightarrow \exists x \in D (P).$

証明は、真理値表を用いて行ってもよいし、同値変形によって行ってもよい。

追加問題 3.6 集合 A と B を $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ と定める。このとき、以下に挙げるそれぞれの論理式の真理値は何か？

1. $\forall m \in A$ ($\forall n \in B$ ($m < n$ である)).
2. $\exists m \in A$ ($\forall n \in B$ ($m < n$ である)).
3. $\forall m \in A$ ($\exists n \in B$ ($m < n$ である)).
4. $\exists m \in A$ ($\exists n \in B$ ($m < n$ である)).
5. $\forall n \in B$ ($\forall m \in A$ ($m < n$ である)).
6. $\exists n \in B$ ($\forall m \in A$ ($m < n$ である)).
7. $\forall n \in B$ ($\exists m \in A$ ($m < n$ である)).
8. $\exists n \in B$ ($\exists m \in A$ ($m < n$ である)).

追加問題 (発展) 3.7 次の命題はどれも正しい。なぜか理由を述べよ。

1. 任意の正実数 ε に対して、ある正実数 δ が存在して、任意の正実数 x に対して、 $x < \delta$ ならば、 $x^2 < \varepsilon$ である。
2. 任意の正整数 K に対して、ある正整数 k が存在して、任意の正整数 n に対して、 $n > k$ ならば、 $\log_2 n > K$ である。