科学技術社会論 II
距離

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学 大学院情報理工学研究科 情報・通信工学専攻

2015 年 10 月 20 日

目次

この 2 コマの目標

「距離」にまつわる話

- 距離とは何か？ (定義)
- 距離をどう使うのか？ (応用)
- 距離をどう計算するのか？ (計算)

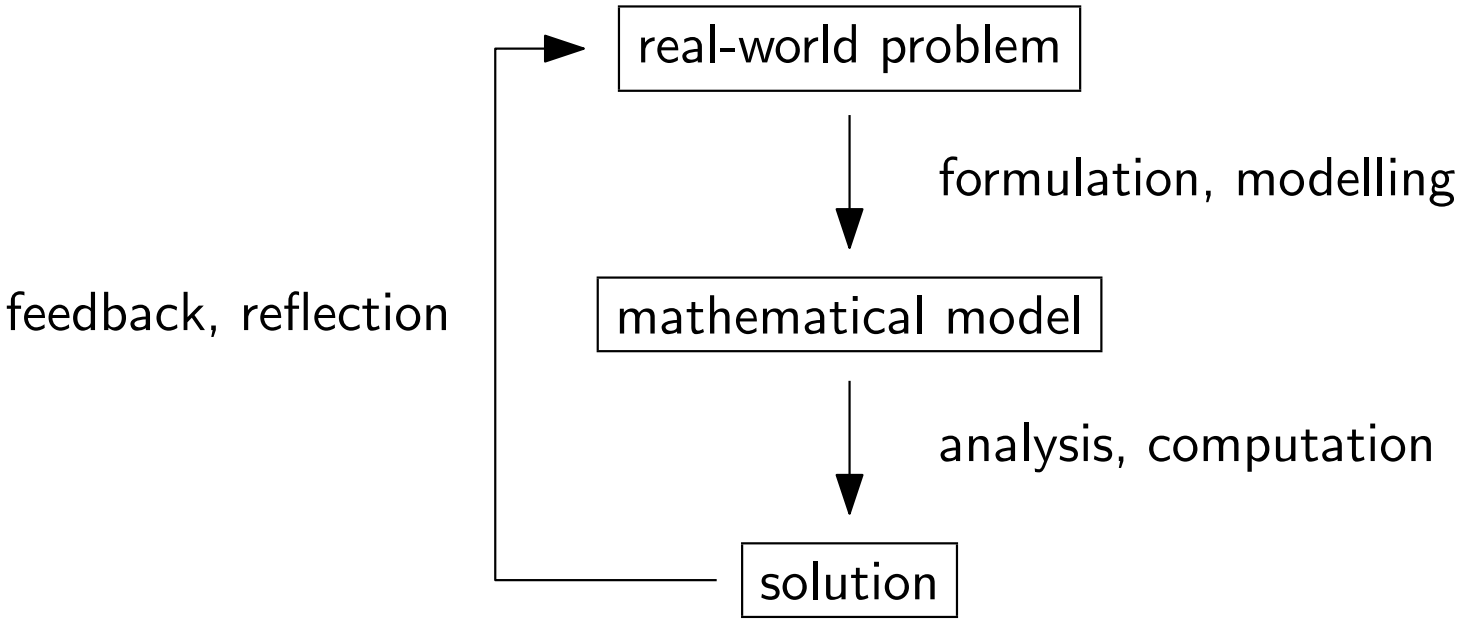
自己紹介

岡本 吉央 (おかもと よしお)　　(愛知県出身)

- 1995 年：東京大学 理科一類 入学
- 1999 年：東京大学 教養学部 基礎科学科第二 卒業
- 2001 年：東京大学 大学院総合文化研究科 広域科学専攻 修士課程 修了
- 2005 年：スイス連邦工科大学チューリヒ校 情報科学科 大学院課程 修了，Ph.D.
- 2005 年：豊橋技術科学大学 助手
- 2007 年：同 助教
- 2007 年：東京工業大学 特任准教授
- 2010 年：北陸先端科学技術大学院大学 特任准教授
- 2012 年：電気通信大学 准教授，現在に至る

専門：離散数学，離散アルゴリズム，離散最適化，それらの応用

数学の使い方

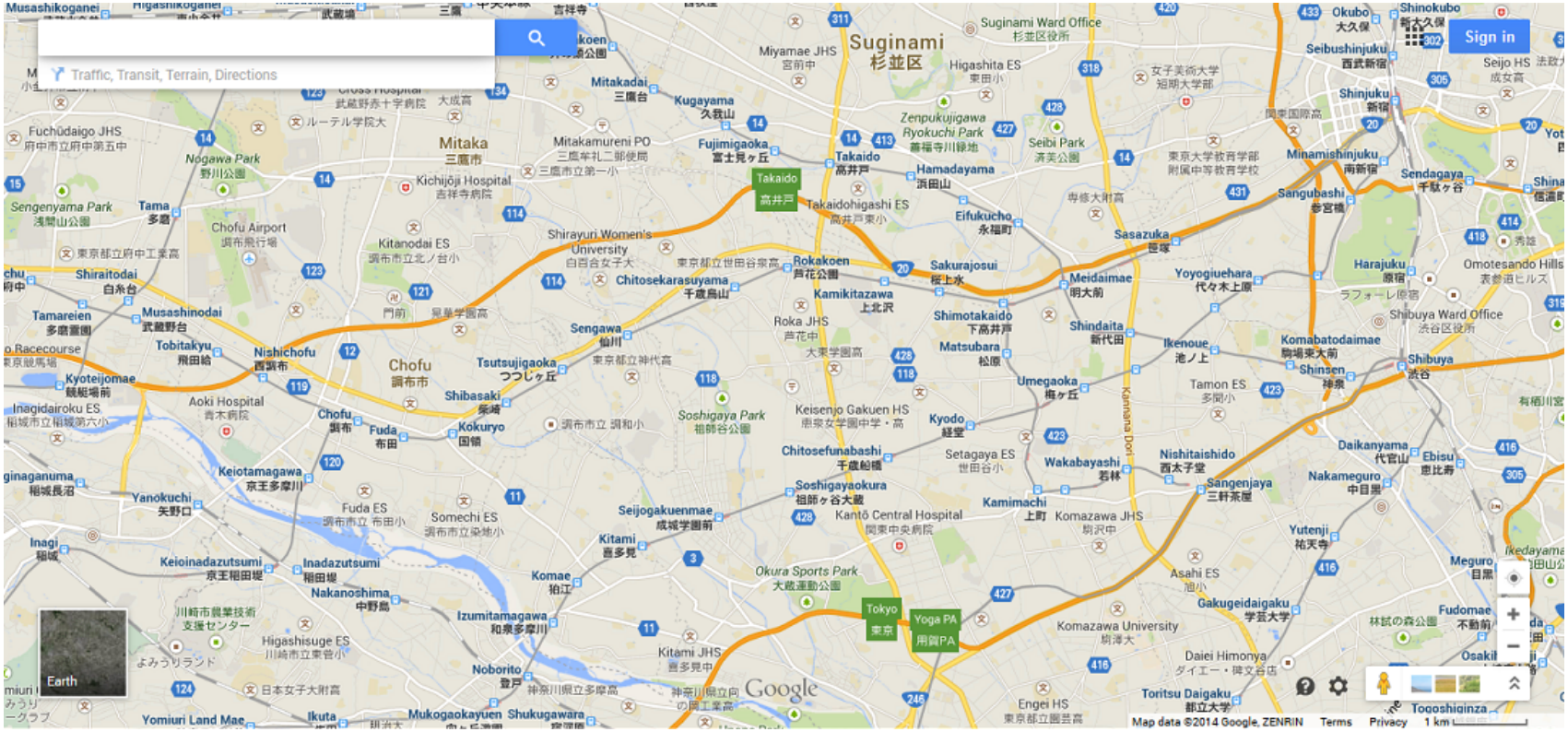


勉強しなくてはいけないのは

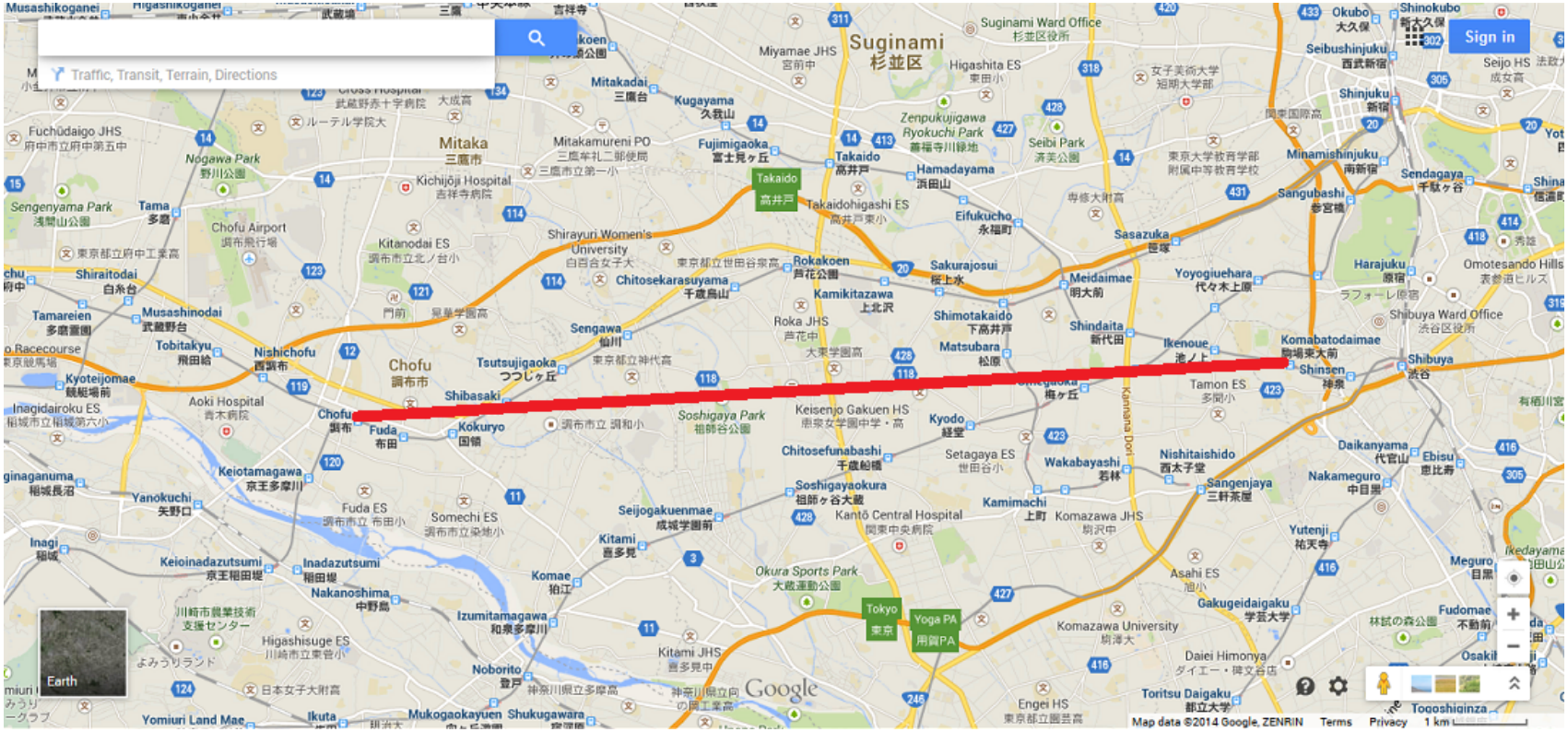
- 道具としての数学
- 数学の使い方

目次

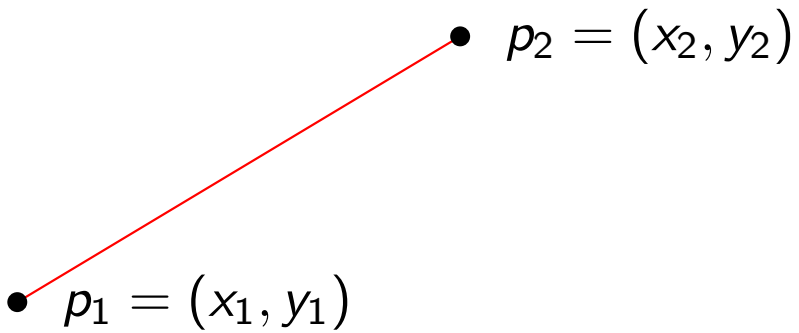
距離と言われて思い浮かべるもの



距離と言われて思い浮かべるもの



距離の公式

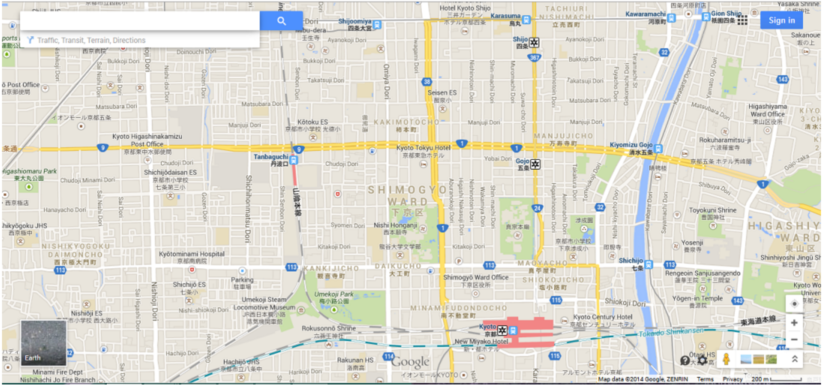


$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

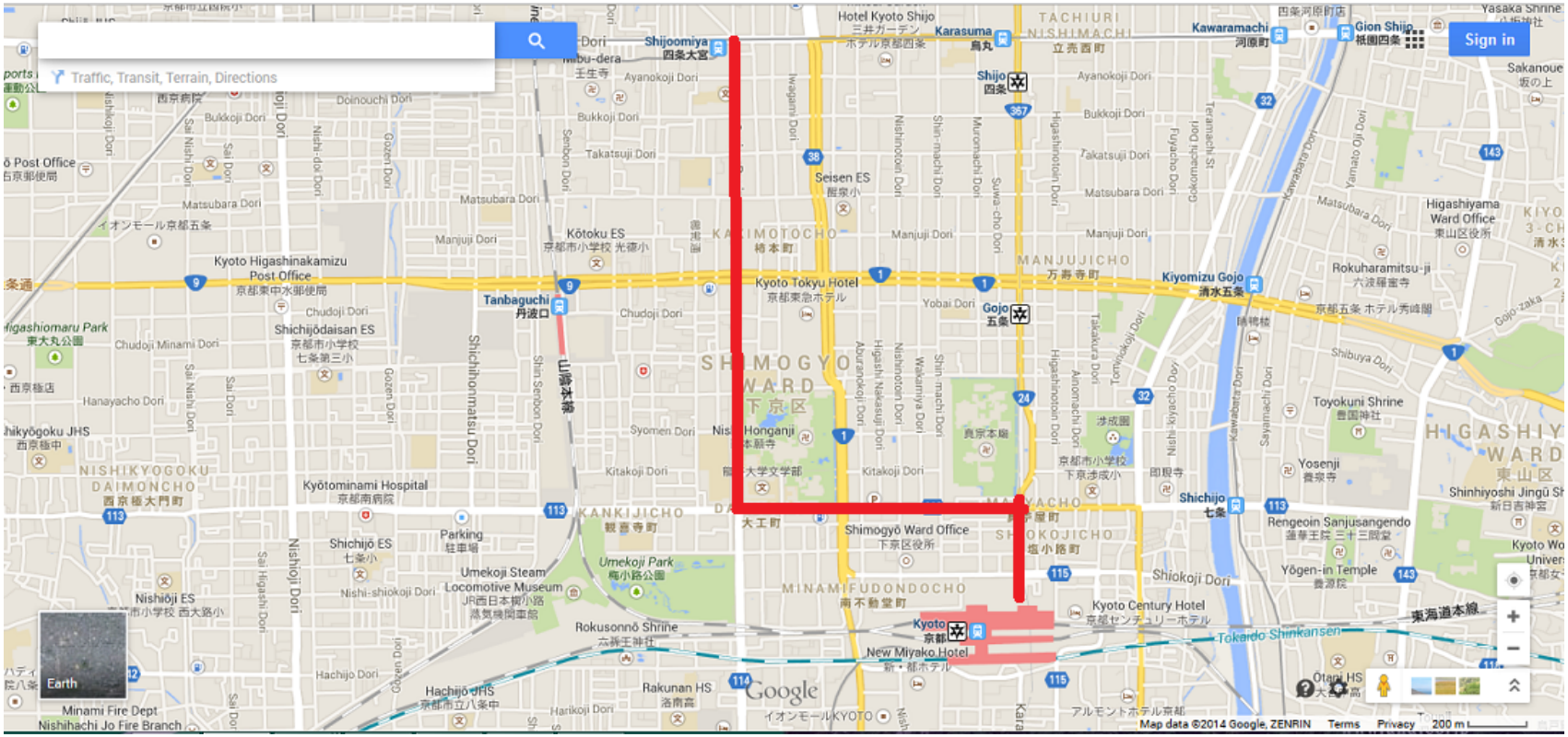
(よく「ユークリッド距離」と呼ばれる)

距離と言われて思い浮かべるもの

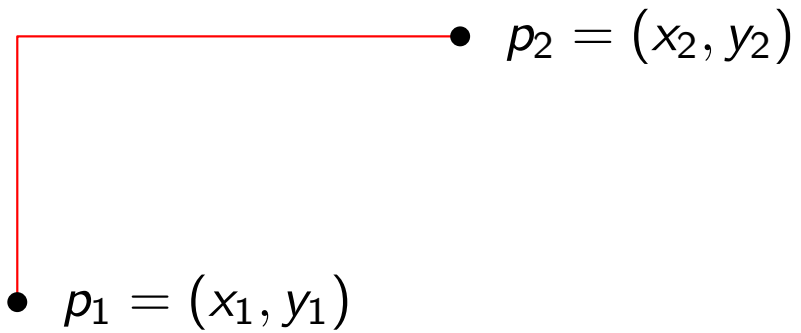
京都


Traffic, Transit, Terrain, Directions
Sign in
Shijoomiya
四条大宮
Karasuma
烏丸
Kawaramachi
河原町
Shijo
四条
Hotel Kyoto Shijo
TACHIURI NISHIMACHI
立売西町
Yasaka Shrine
Sakanoue
Post Office
Bukkoji Dori
Takatsuji Dori
Matsubara Dori
Manjuji Dori
Omiya Dori
Seisen ES
Kōtoku ES
KAKIMOTOCHO
柿本町
MANJUJICHO
万寿寺町
Kiyomizu Gojo
清水五条
Higashiyama Ward Office
東山区役所
Rokuharamitsu-ji
六波羅蜜寺
Kyoto Higashinakamizu Post Office
京都東中水郵便局
Tanbaguchi
丹波口
Kyoto Tokyu Hotel
京都東急ホテル
Gojo
五条
Higashiomaru Park
東大丸公園
Shichijōdaisan ES
Chudoji Dori
SHIMOGYO WARD
下京区
Nishi Honganji
西本願寺
Toyokuni Shrine
豊国神社
HIGASHIYAMA WARD
東山区
Yosenji
Hanayacho Dori
NISHIKYOGOKU DAIMONCHO
西京極大門町
Kyōtominami Hospital
京都南病院
Kitakoji Dori
Shichijo
七条
KANKIJICHO
観喜寺町
DAIKUCHO
大工町
MAOYACHO
SHIOKOJICHO
塩小路町
Shimogyō Ward Office
下京区役所
Rengeoin Sanjusangendo
Shinhiyoshi Jingū
Shichijo ES
Parking
Umekoji Steam Locomotive Museum
Umekoji Park
梅小路公園
Shiokoji Dori
Yōgen-in Temple
MINAMIFUDONDOCHO
南不動堂町
Kyoto Century Hotel
Nishiōji ES
Rokusonnō Shrine
六孫王神社
Kyoto
京都
New Miyako Hotel
Tokaido Shinkansen
東海道本線
Earth
Minami Fire Dept Nishihachi Jo Fire Branch
Hachijo JHS
Rakunan HS
洛南高
Otani HS
Google
Map data ©2014 Google, ZENRIN
Terms
Privacy
200 m

京都


Traffic, Transit, Terrain, Directions
Sign in
Earth
Google
Map data ©2014 Google, ZENRIN
Terms
Privacy
200 m
Kyoto Tokyu Hotel
Kyoto Century Hotel
New Miyako Hotel
Kyoto Higashinakamizu Post Office
Shimogyō Ward Office
Kyōtominami Hospital
Umekoji Park
Umekoji Steam Locomotive Museum
Rokusonnō Shrine
Kōtoku ES
Seisen ES
Shichijōdaisan ES
Shichijō ES
Nishiōji ES
Rengeoin Sanjusangendo
Yōgen-in Temple
Toyokuni Shrine
Yosenji
Higashiyama Ward Office
Rokuharamitsu-ji
Kiyomizu Gojo
Gojo
Shijo
Karasuma
Kawaramachi
Gion Shijo
Tanbaguchi
Shichijo
Kyoto
Tokaido Shinkansen
東海道本線
SHIMOGYO WARD
下京区
HIGASHIYAMA WARD
東山区
NISHIKYOGOKU DAIMONCHO
KANKIJICHO
MINAMIFUDONDOCHO
MANJUJICHO
TACHIURI NISHIMACHI
Hotel Kyoto Shijo
Minami Fire Dept Nishihachi Jo Fire Branch

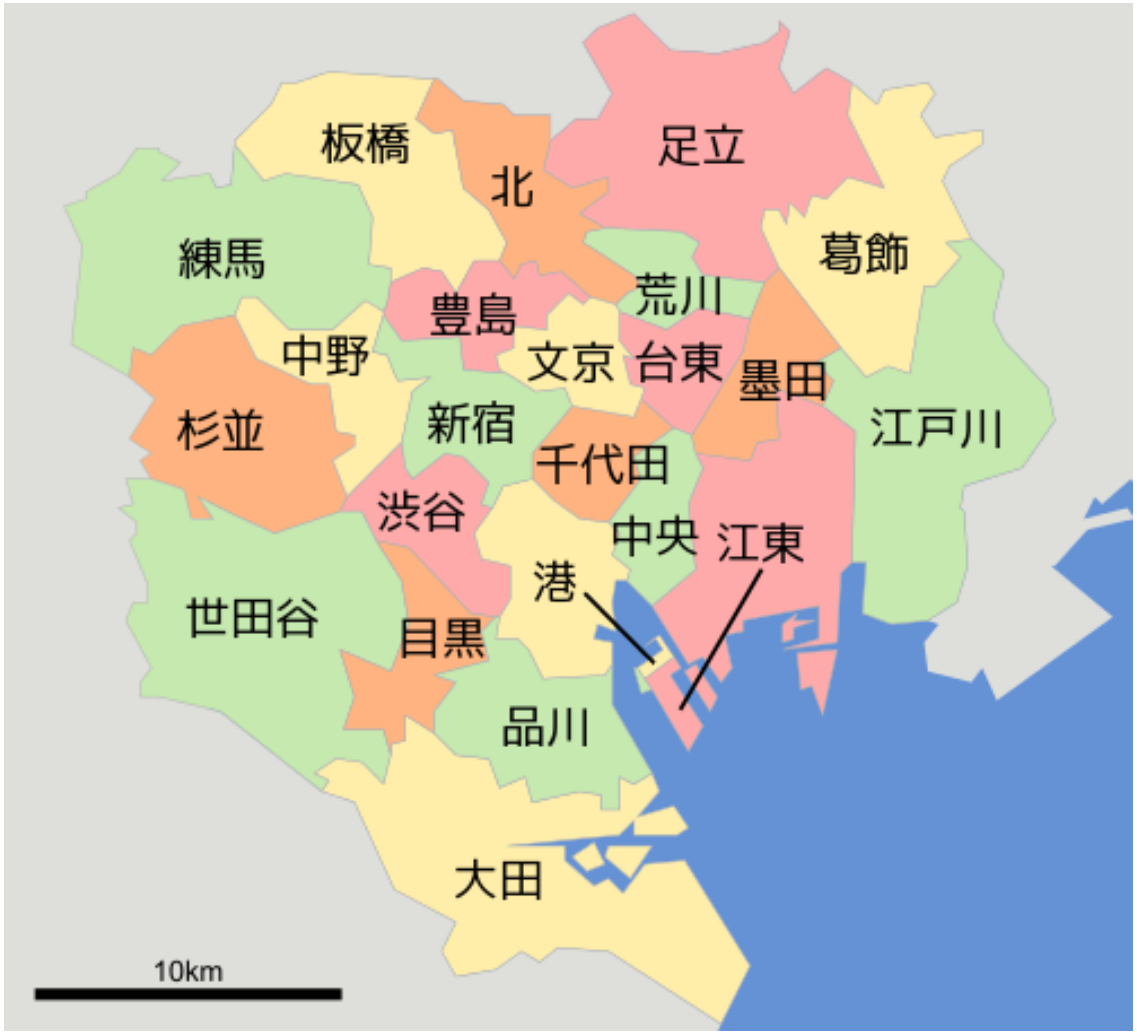
京都 — 距離の公式



$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

(よく「マンハッタン距離」と呼ばれる)

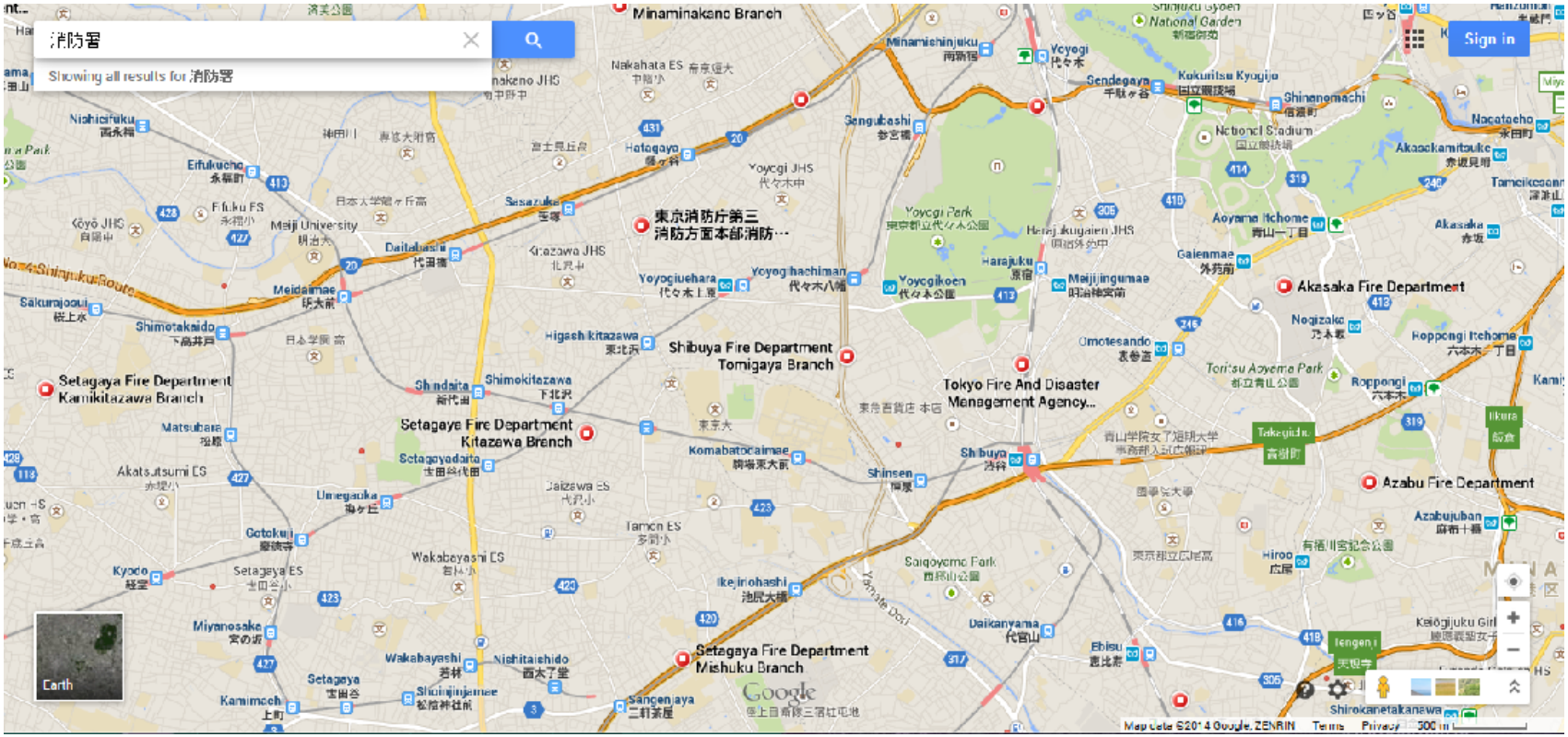
距離によって何ができる?: 分類



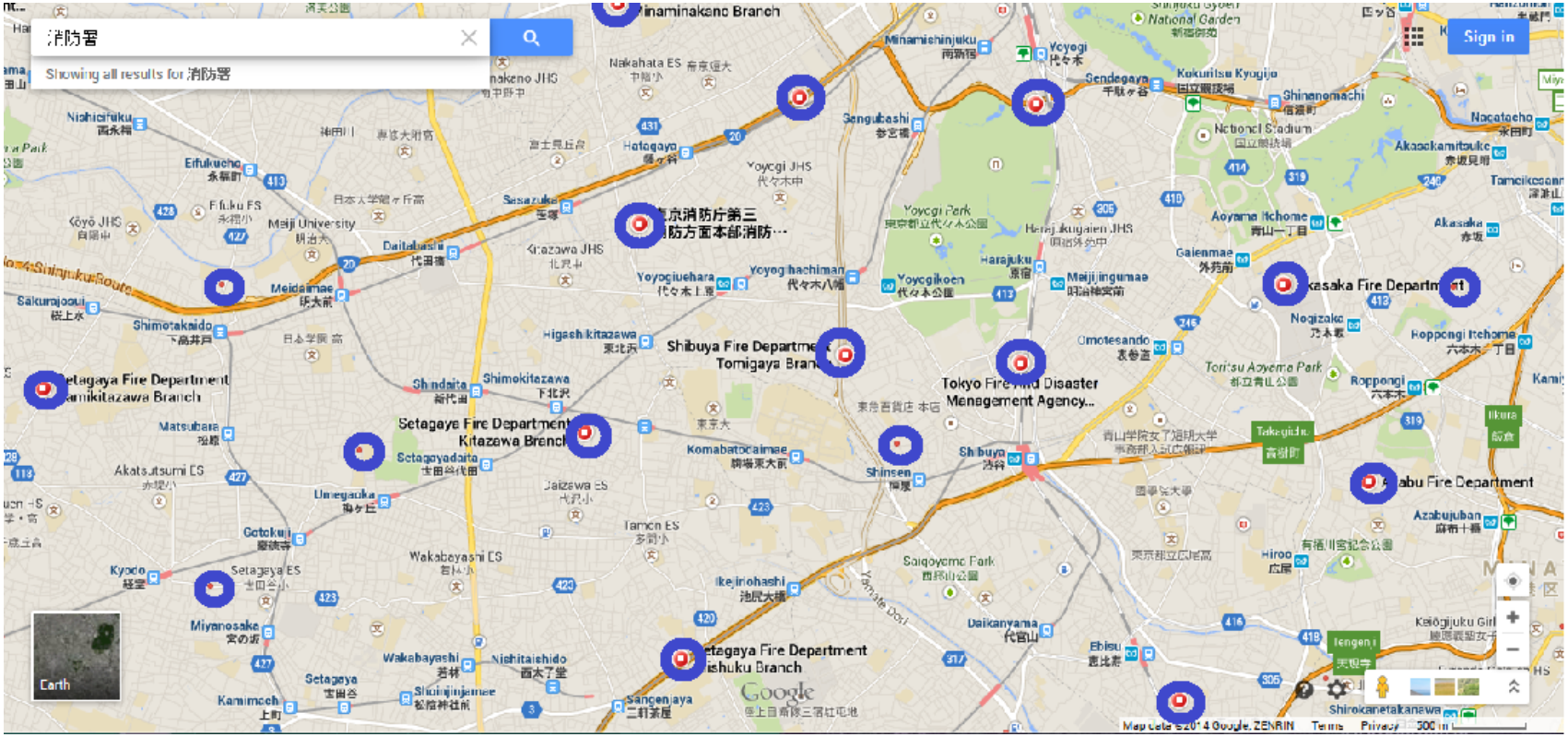
http://ja.wikipedia.org/wiki/東京都区部

距離によって何ができる?: 検索

距離によって何ができる?: 配置



距離によって何ができる?: 配置



距離は有用なのだから…

距離は有用なのだから，いろんなものの間の「距離」を測りたい

それができれば，次もできそう

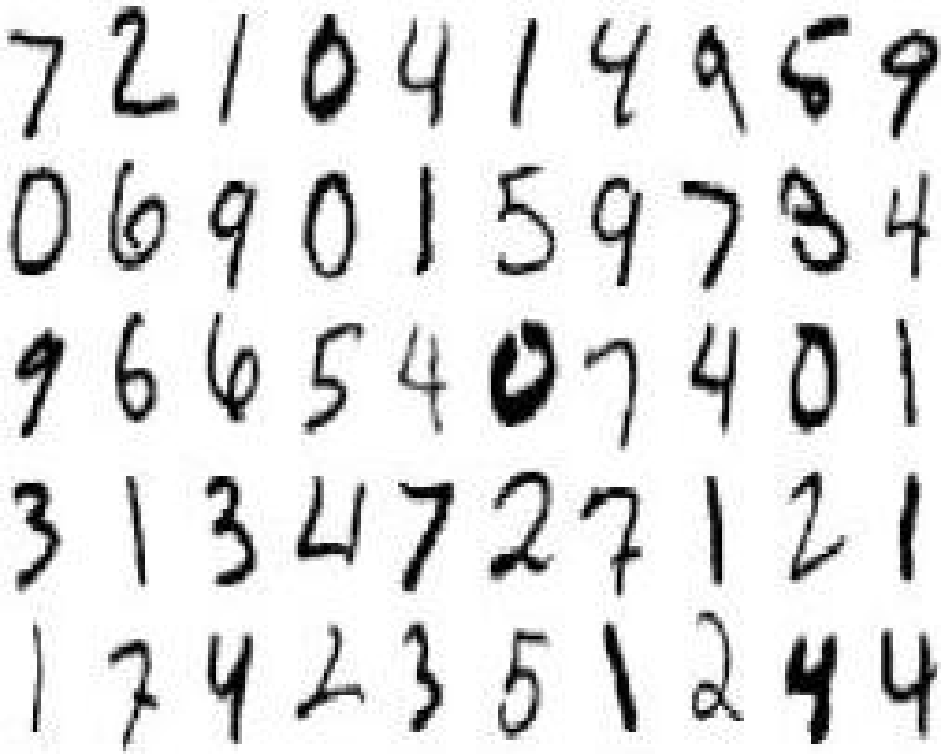
- 分類
- 検索
- 配置

別の言い方

分類／検索／配置を行いたいときは，
「距離」が測れれば，うまくいきそう

$\rightsquigarrow$ 距離に基づく統一的方法論を目指せる (数理の力)

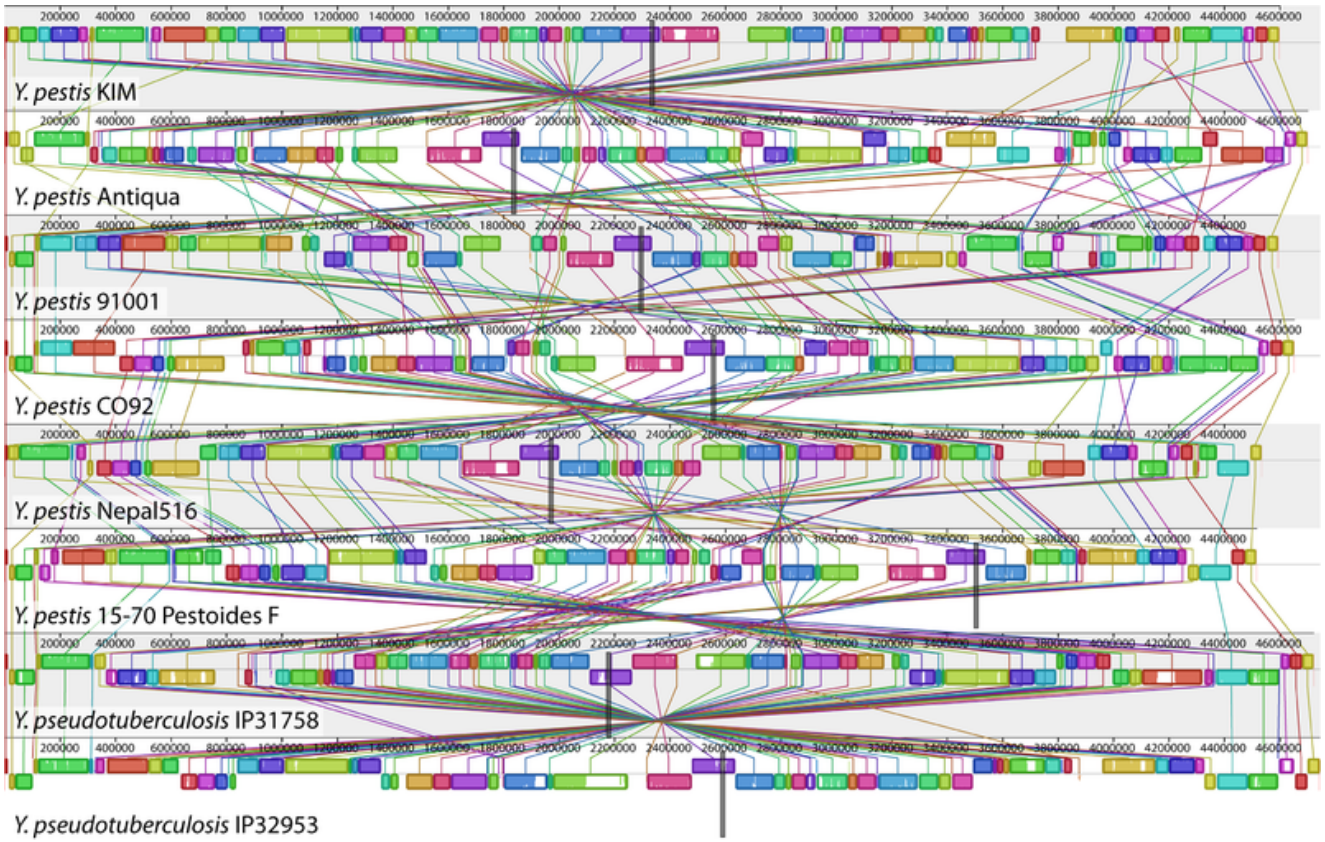
距離を測りたいもの：画像



MNIST Database of handwritten digits

$\rightsquigarrow$ 画像認識，画像検索

距離を測りたいもの：ゲノム

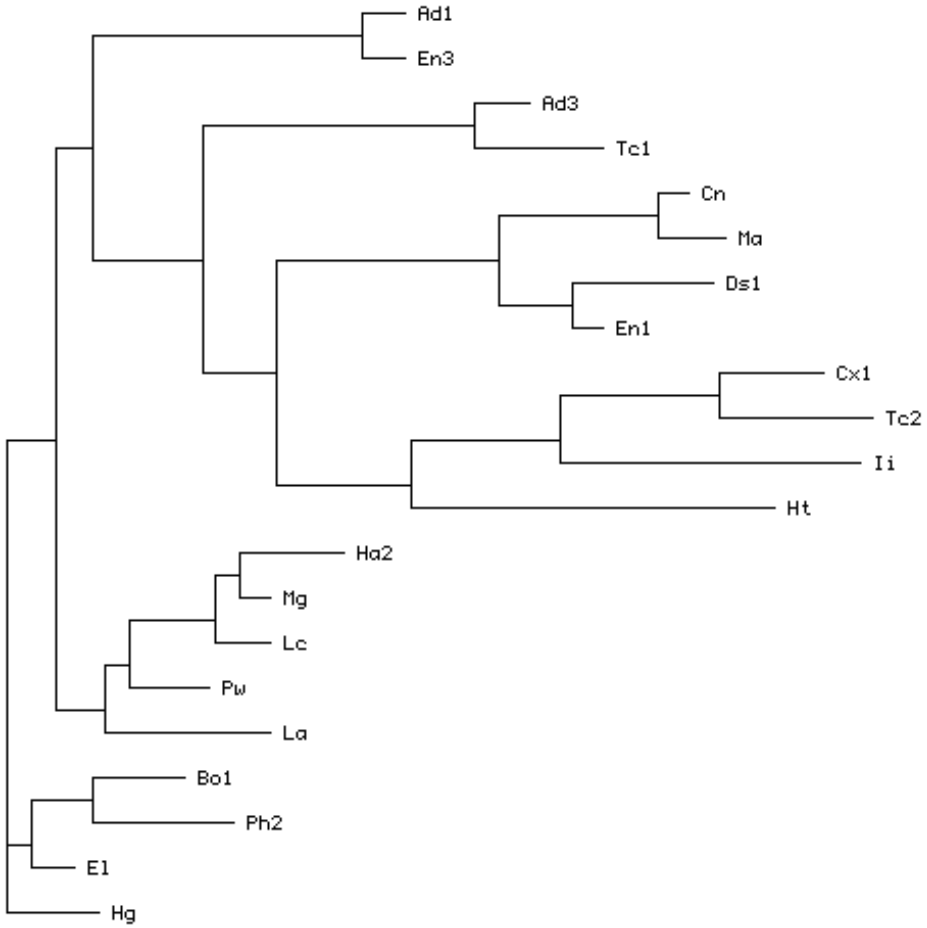


http://en.wikipedia.org/wiki/Comparative_genomics

$\rightsquigarrow$ 系統樹復元，遺伝形質発見

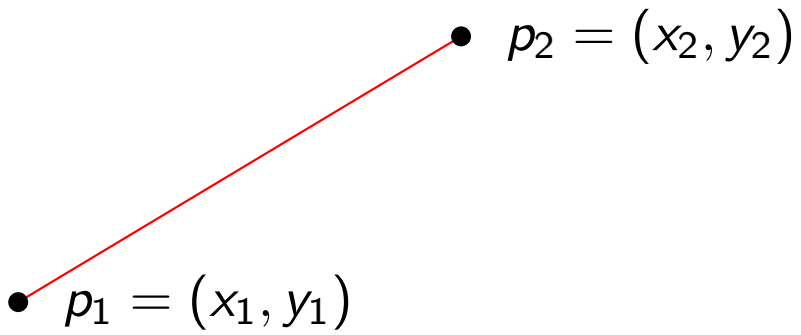
距離を測りたいもの：文書

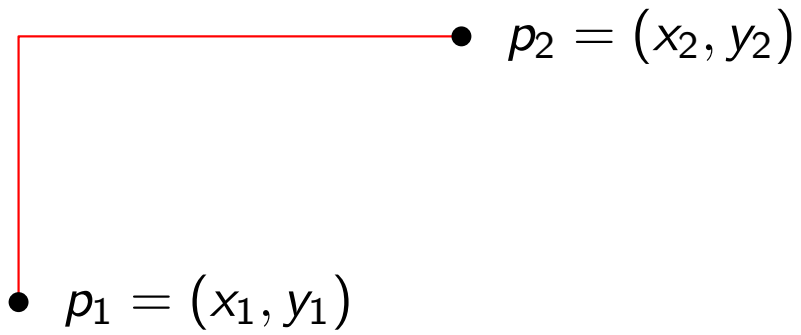
カンタベリー物語の「系統樹」



http://www.ahds.ac.uk/__print__/history/creating/case-studies/canterbury/index.htm

2 つの距離が共通して持つ性質：非負性

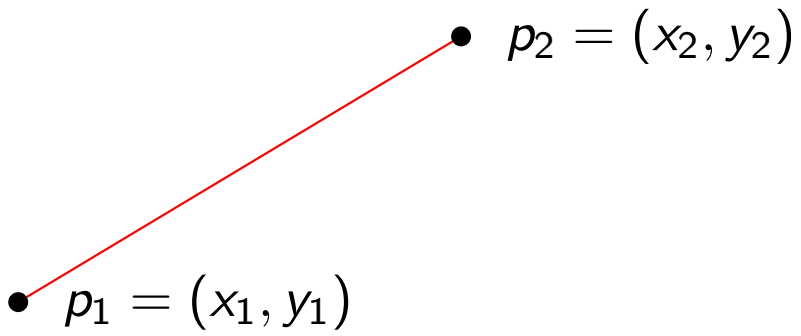


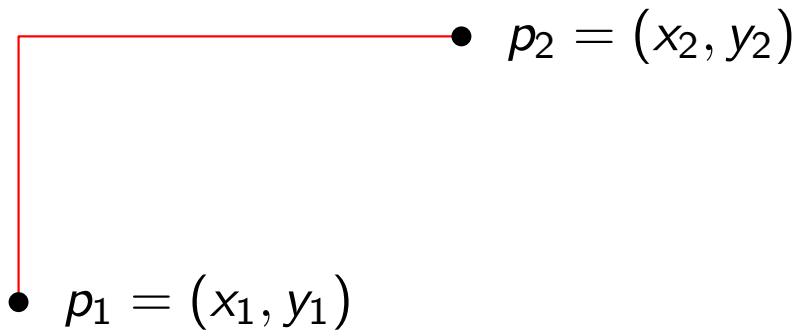


非負性

$$d(p_1, p_2) \geq 0$$

2 つの距離が共通して持つ性質：同一性

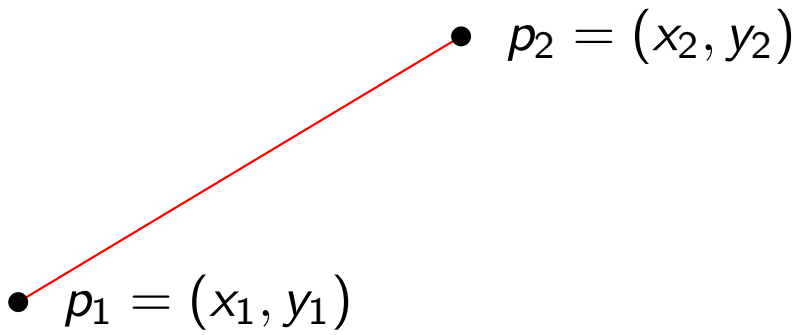


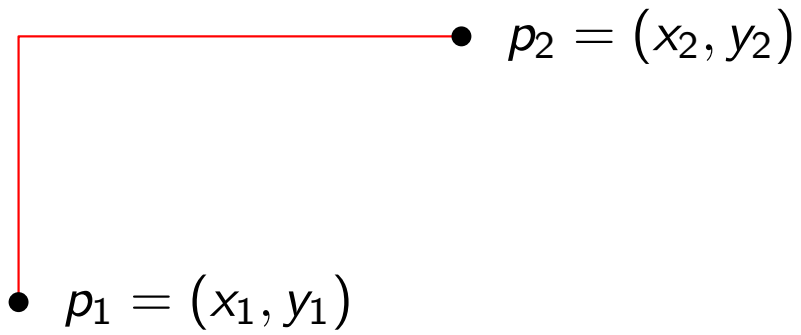


同一性

$$d(p_1, p_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = p_2$$

2 つの距離が共通して持つ性質：対称性

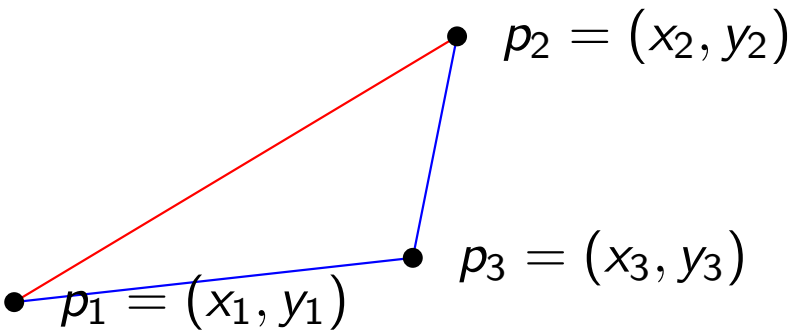


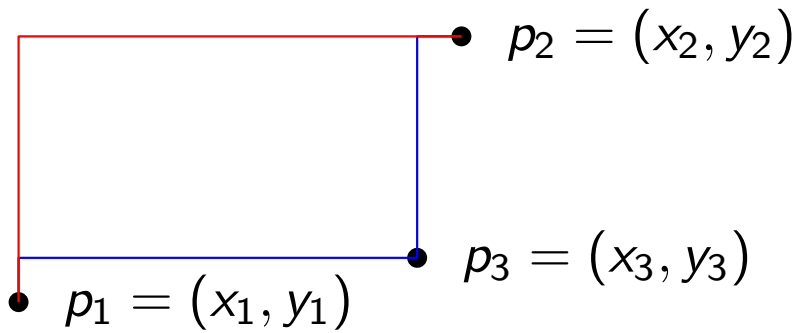


対称性

$$d(p_1, p_2) = d(p_2, p_1)$$

2 つの距離が共通して持つ性質：三角不等式





三角不等式

$$d(p_1, p_2) \leq d(p_1, p_3) + d(p_3, p_2)$$

距離の定義

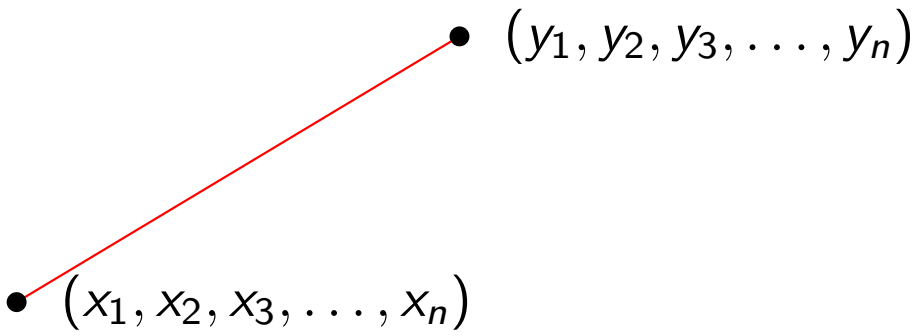
距離の定義

2 つの「もの」x と y の間の距離 $d(x, y)$ とは次を満たすもののこと

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

これを満たす $d(x, y)$ はどれも「距離」である

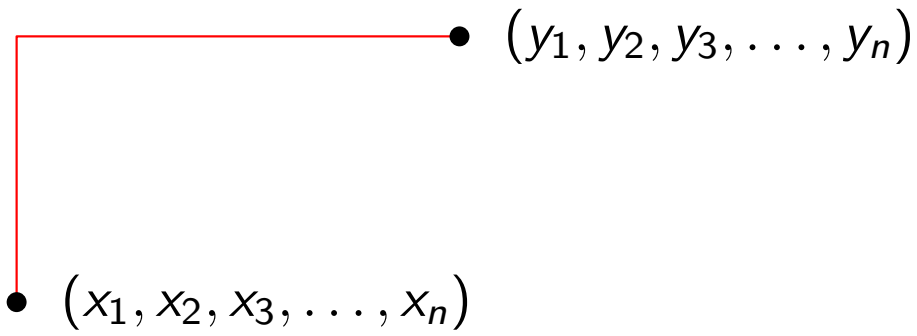
高次元ユークリッド距離



$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

先ほどの 4 つの条件を満たす

高次元マンハッタン距離



$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

先ほどの 4 つの条件を満たす

文字列間の Levenshtein 距離 — バイオインフォマティクスでよく使われる

編集に基づく距離

k i t t e n
s i t t e n　replace
s i t t i n　replace
s i t t i n g　insert

編集操作：

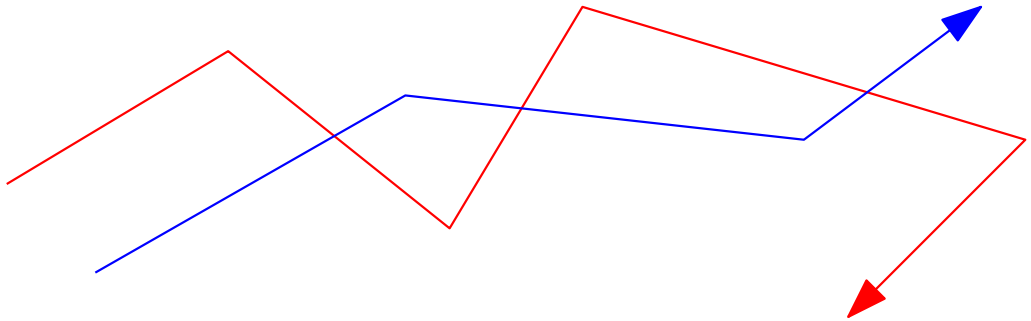
- 置換
- 挿入
- 削除

Levenshtein 距離 $=$ 一方から他方を得るための編集回数の最小値

$$d(\text{kitten}, \text{sitting}) = 3$$

曲線間の Frechét 距離

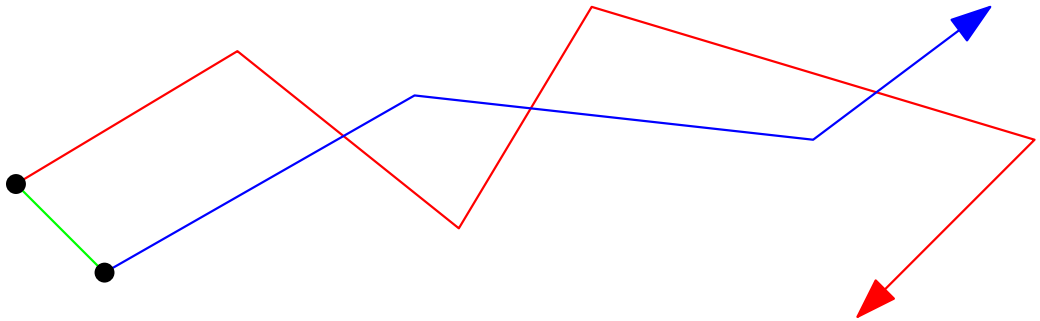
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

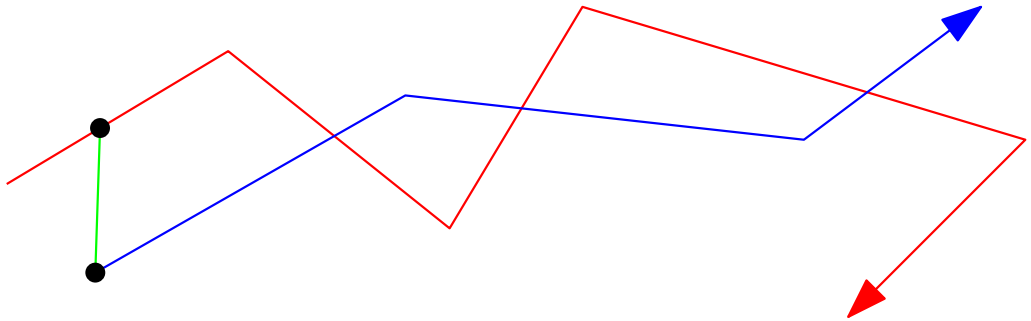
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

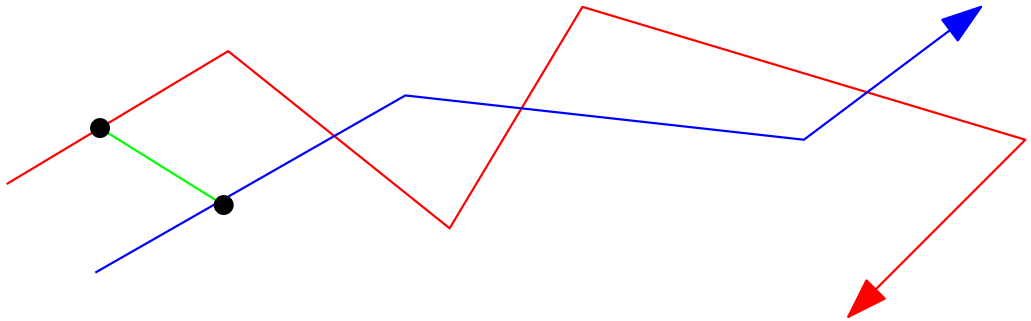
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

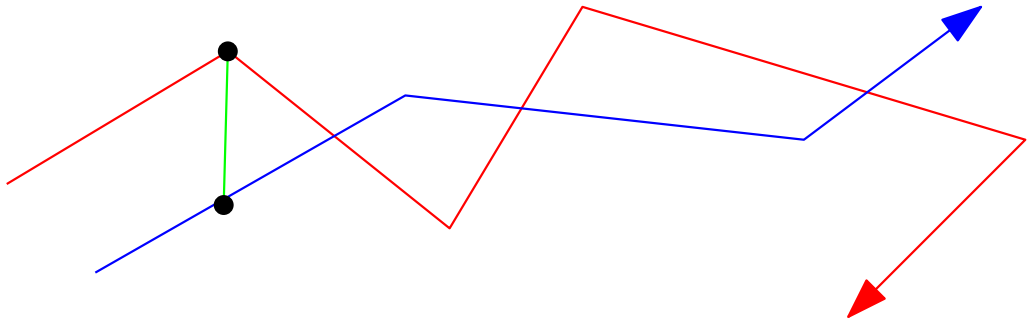
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

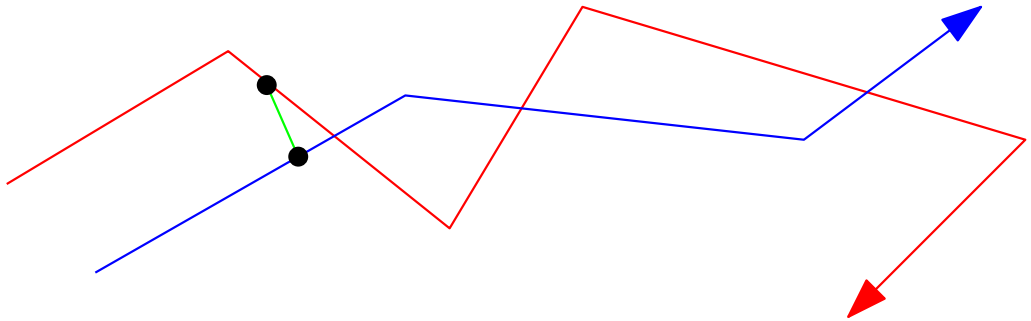
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

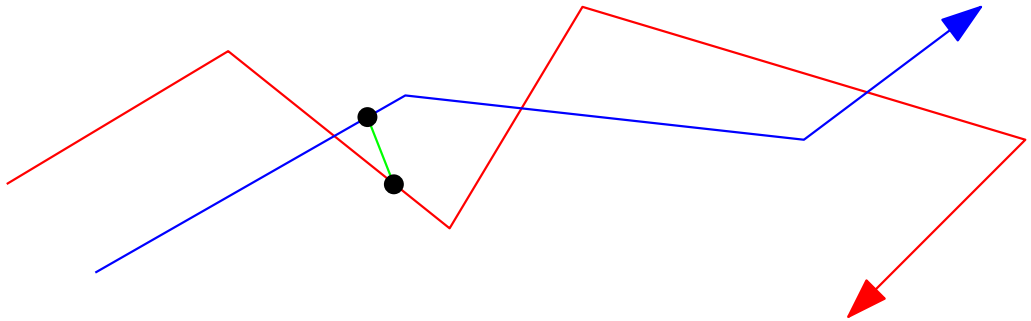
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

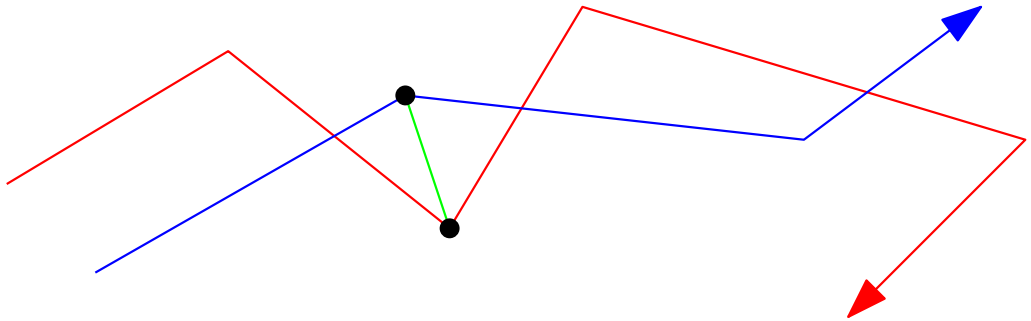
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

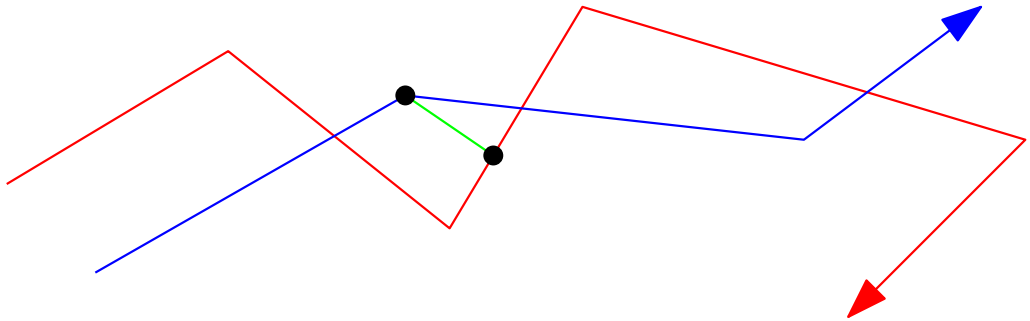
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

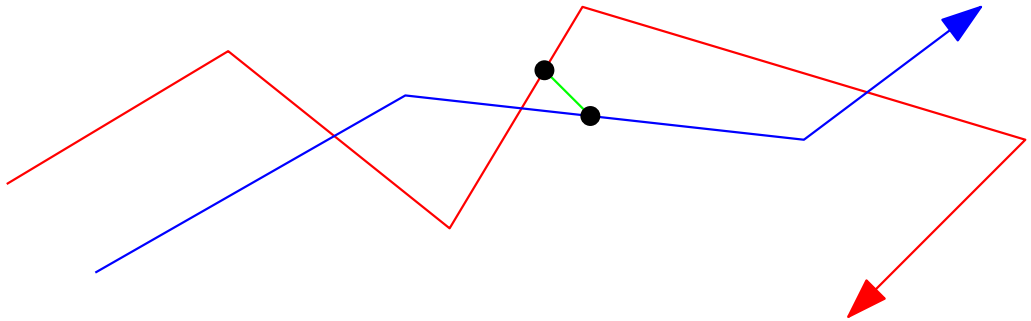
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

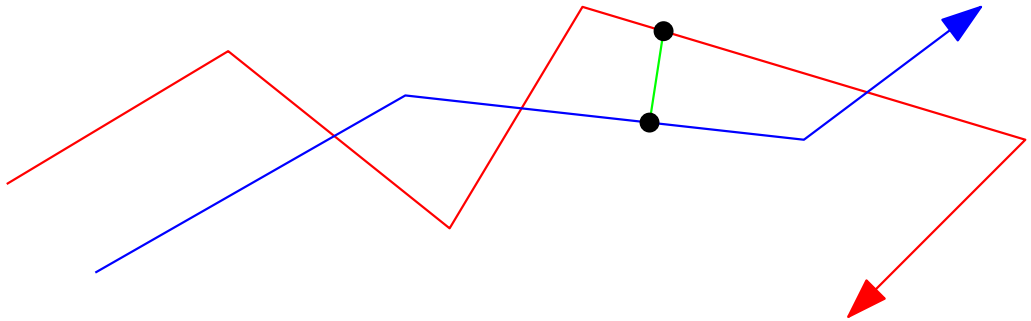
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

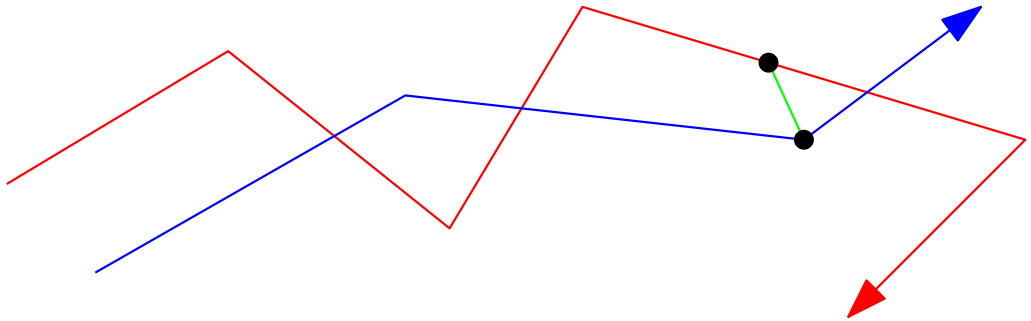
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

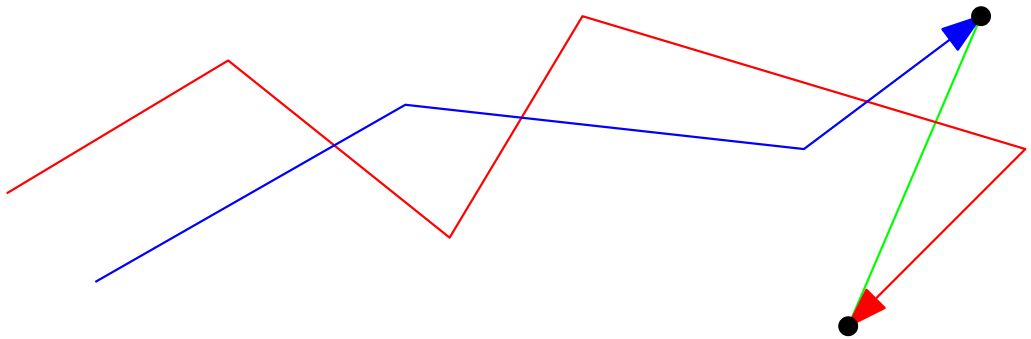
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

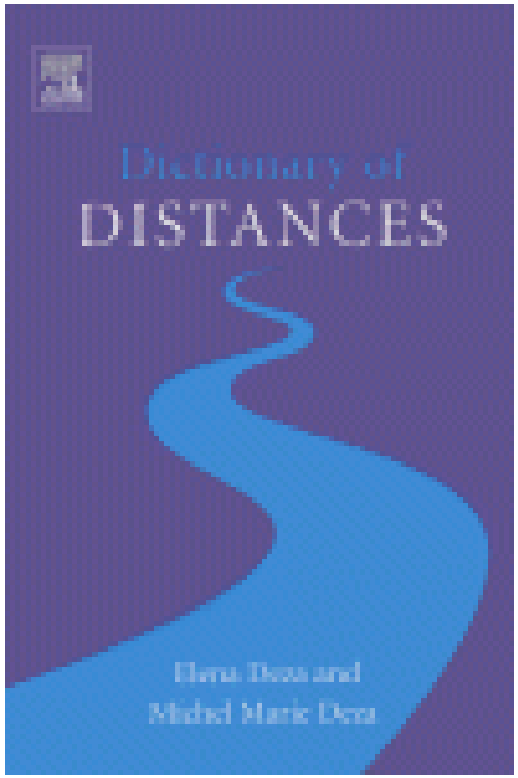
曲線間の Frechét 距離

曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

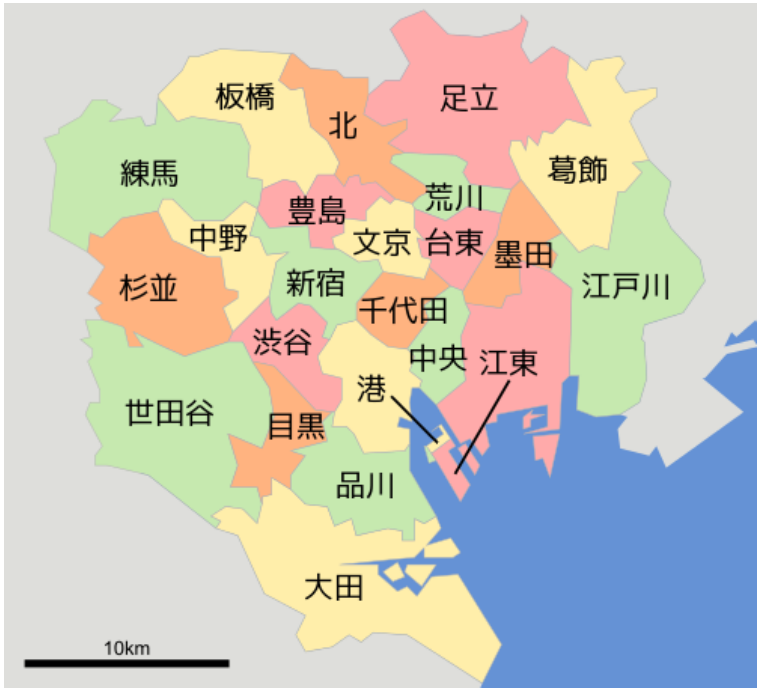
距離の辞典



Elena Deza and Michel-Marie Deza,
Dictionary of Distances,
Elsevier, 2006.

目次

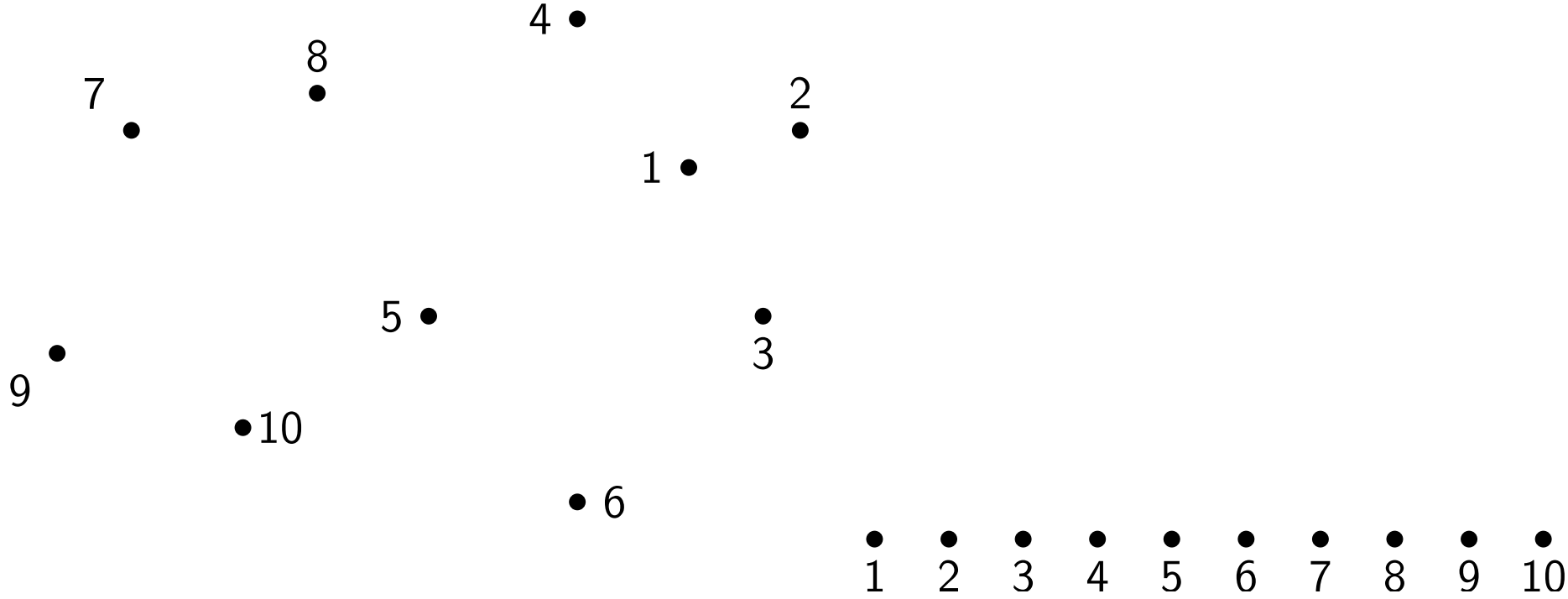
距離を用いた分類



応用例

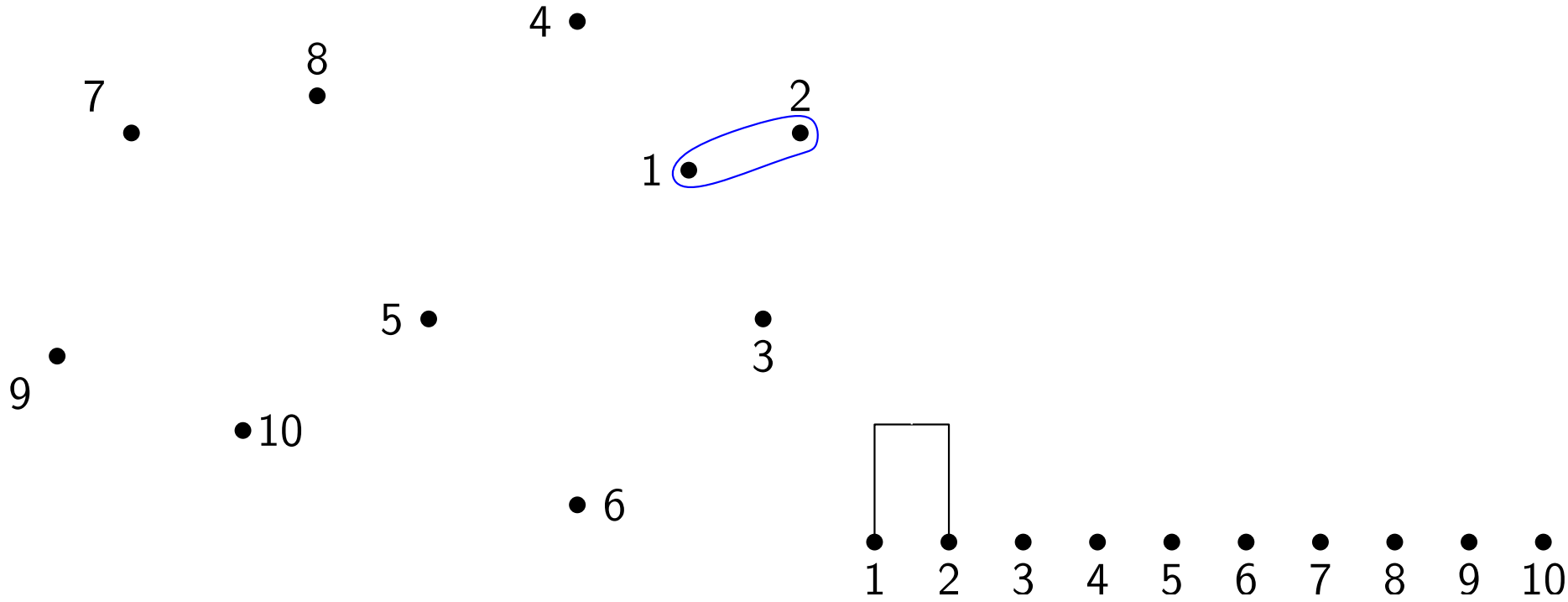
- 階層的クラスタリング
- 系統樹作成

樹形図 (デンドログラム) の作成法



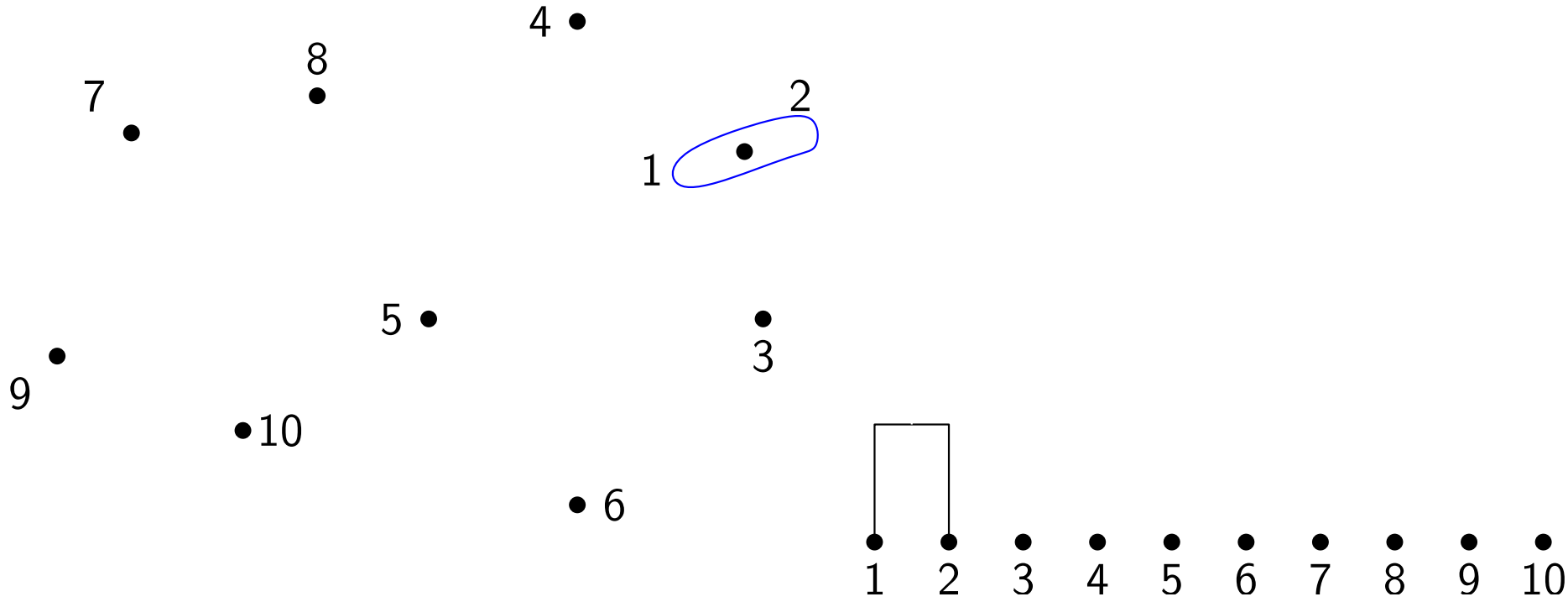
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



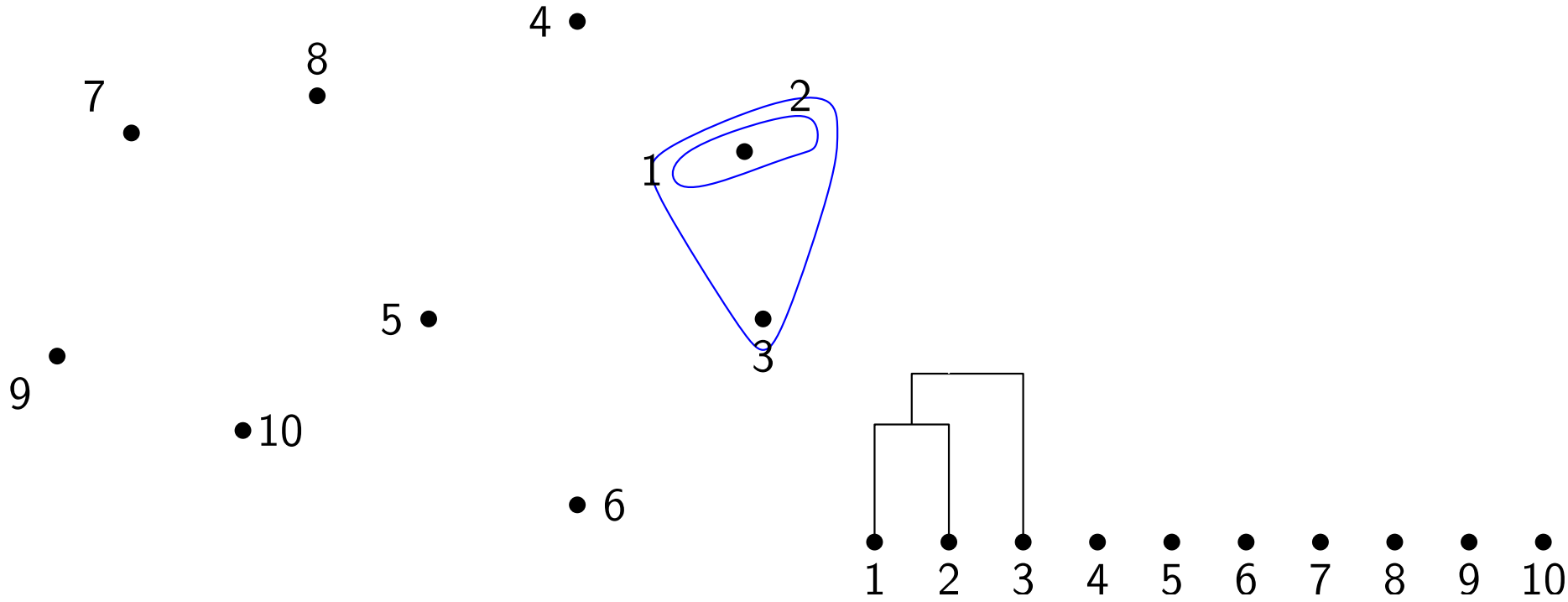
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



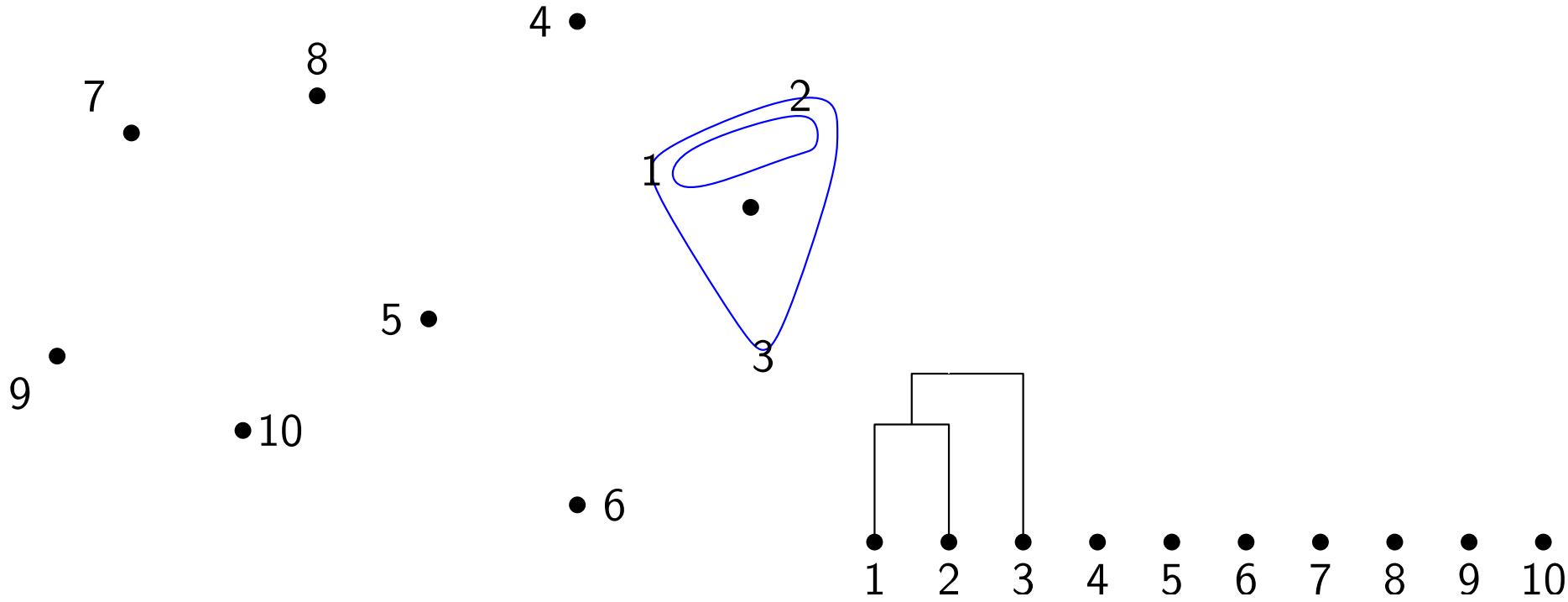
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



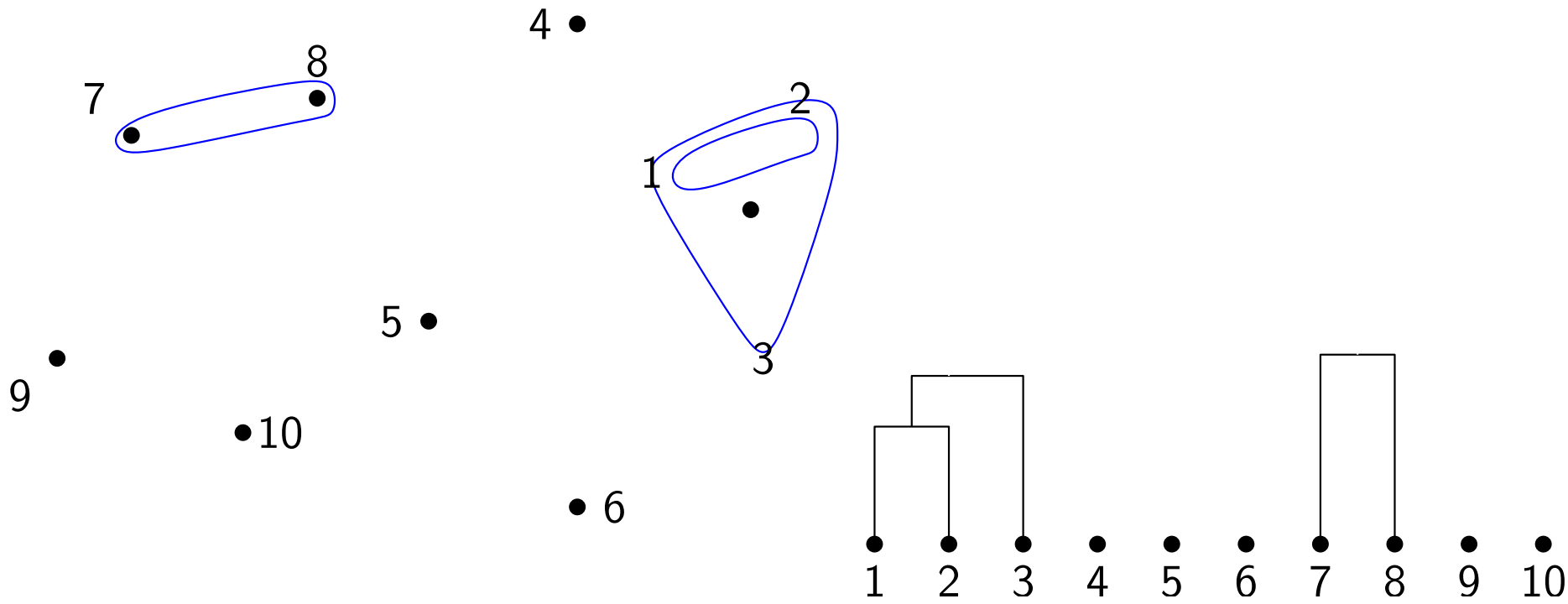
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



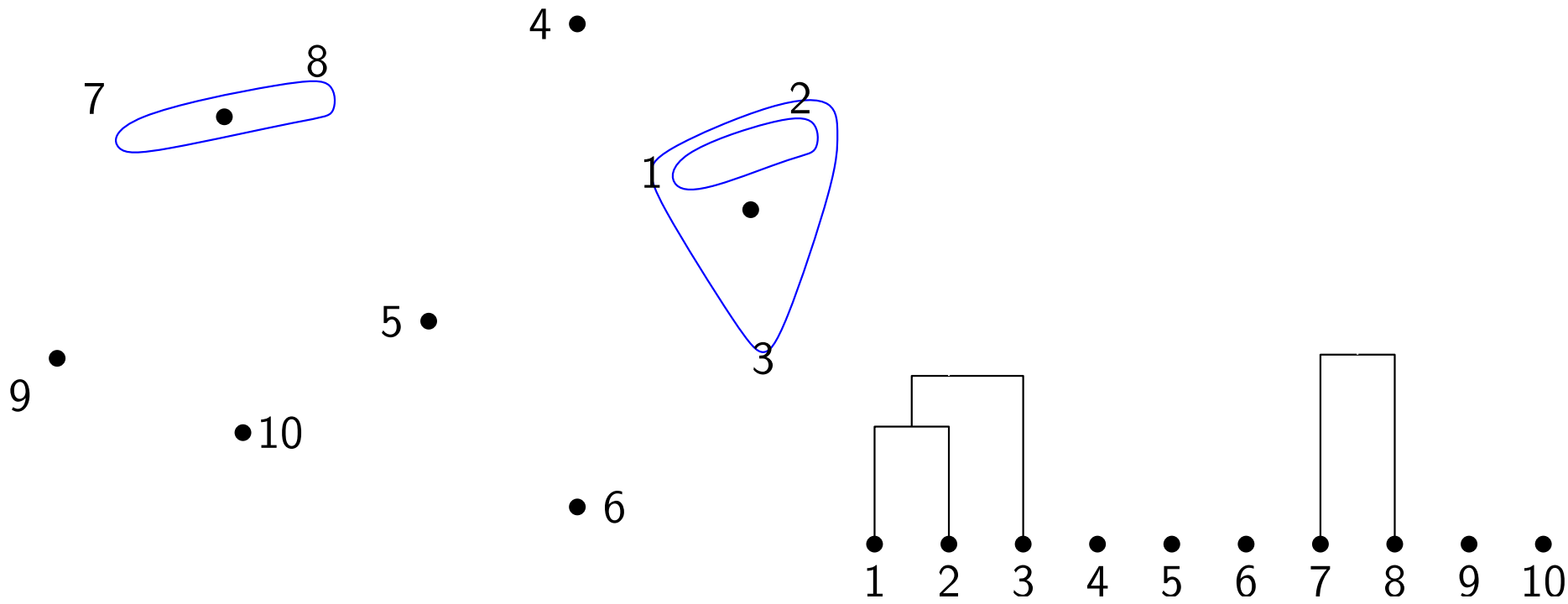
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



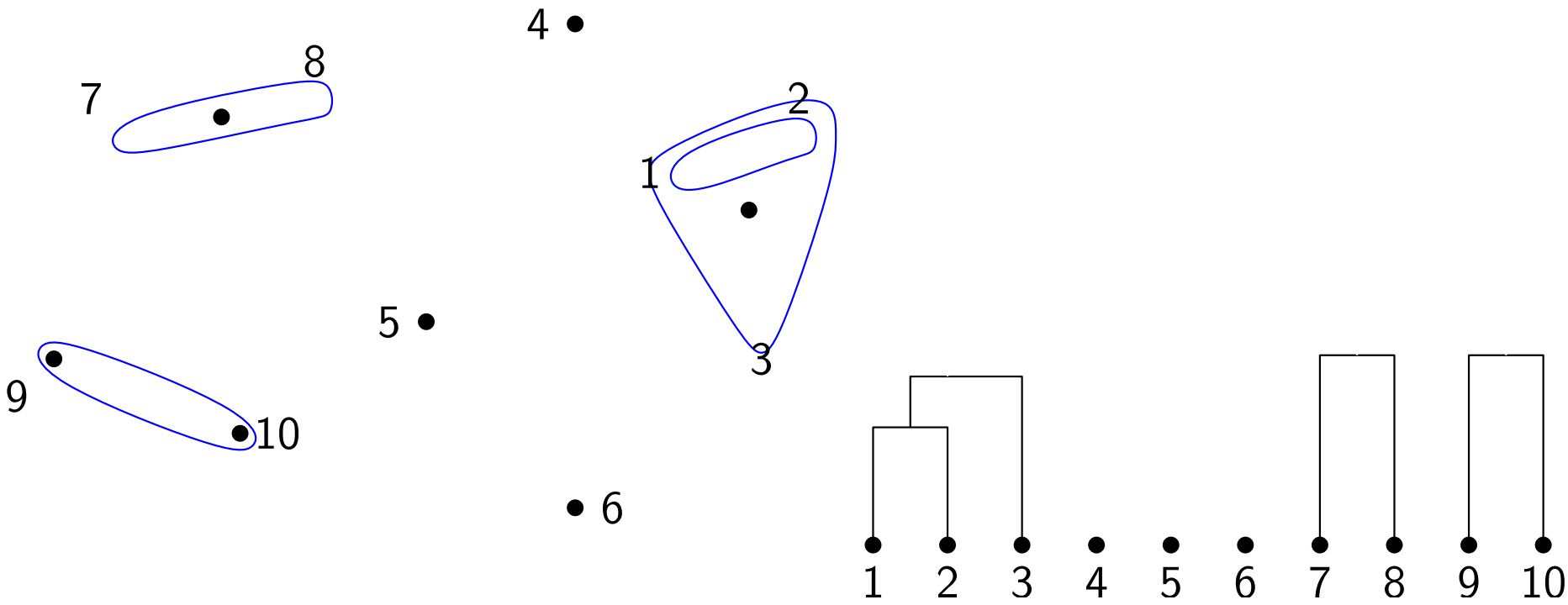
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



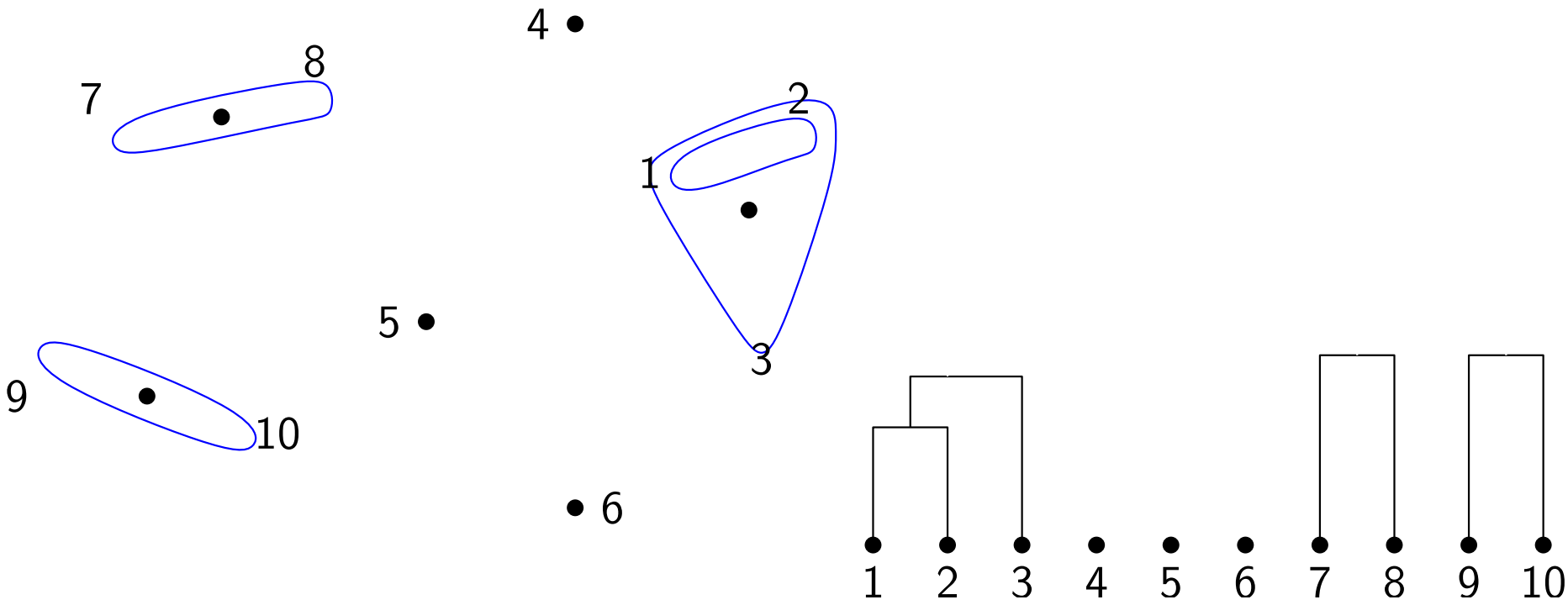
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



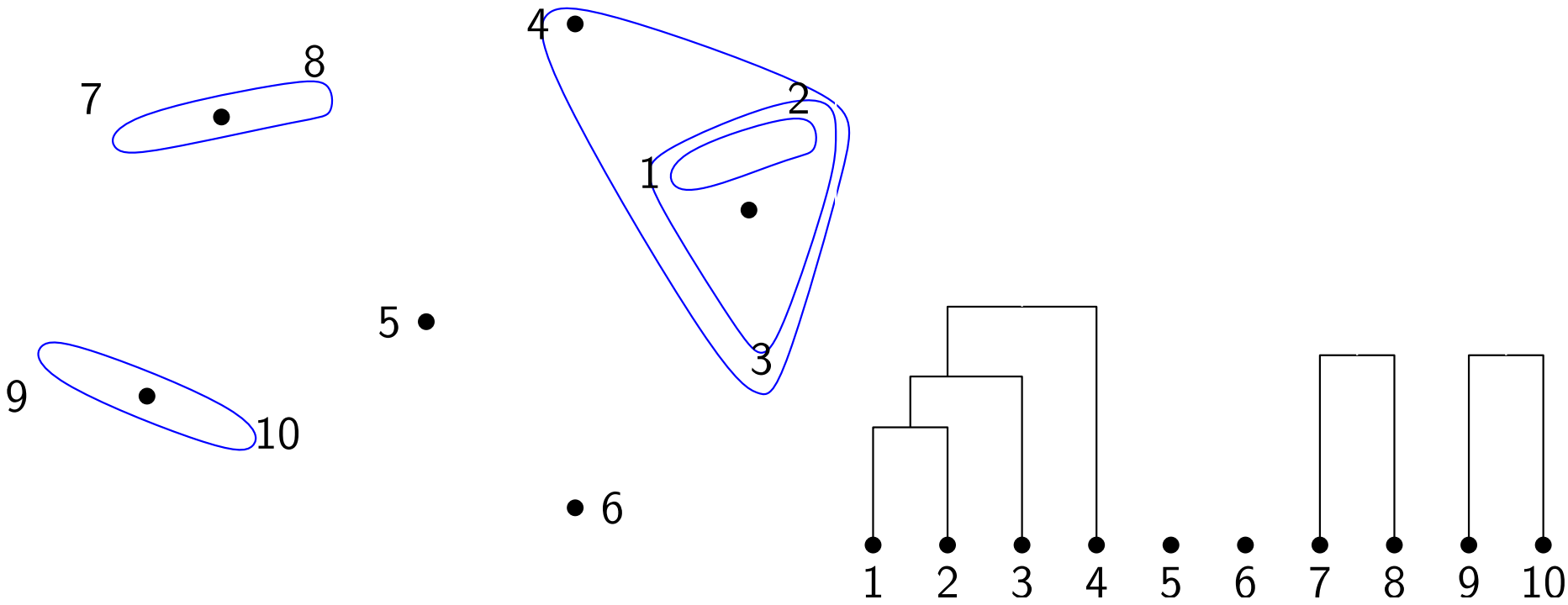
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



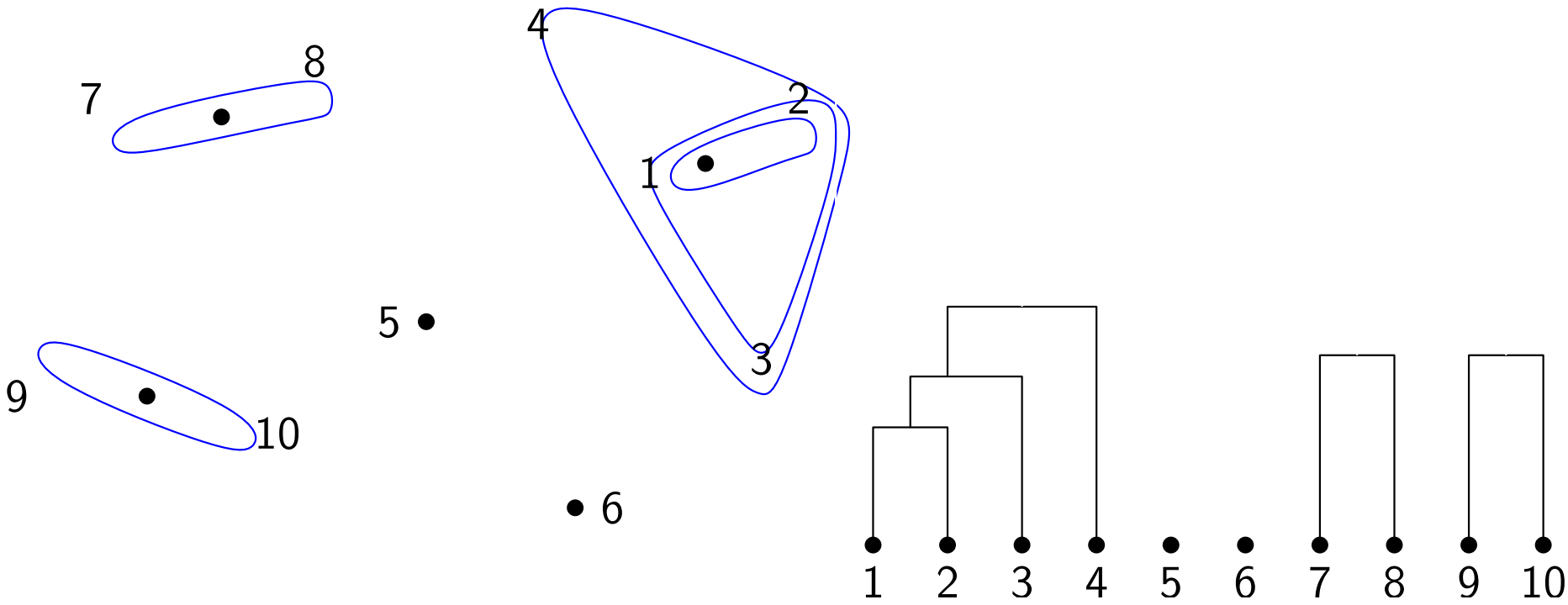
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法



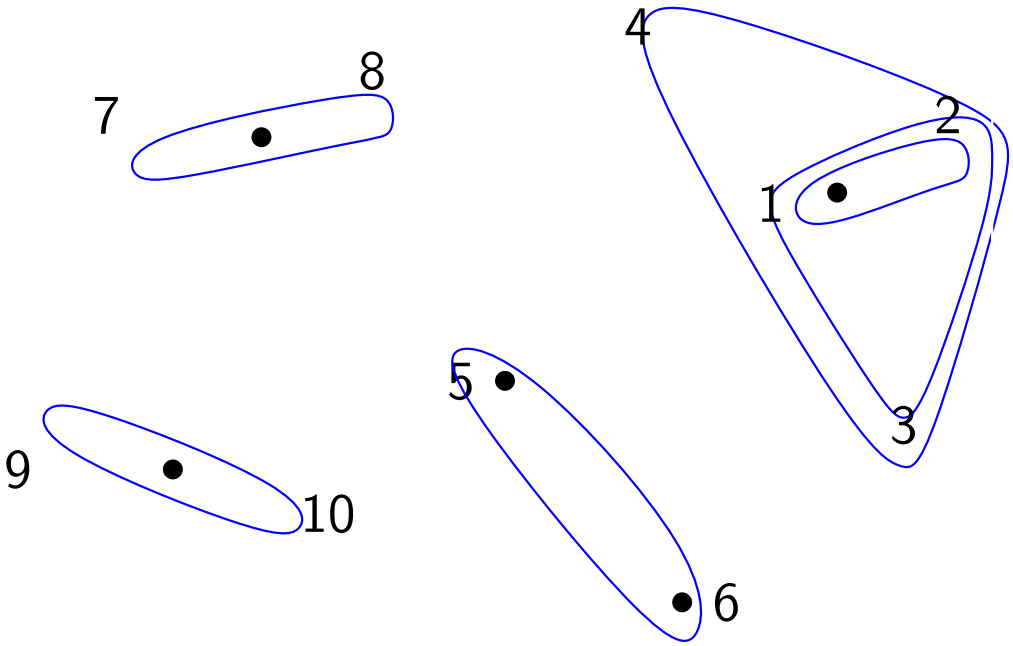
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

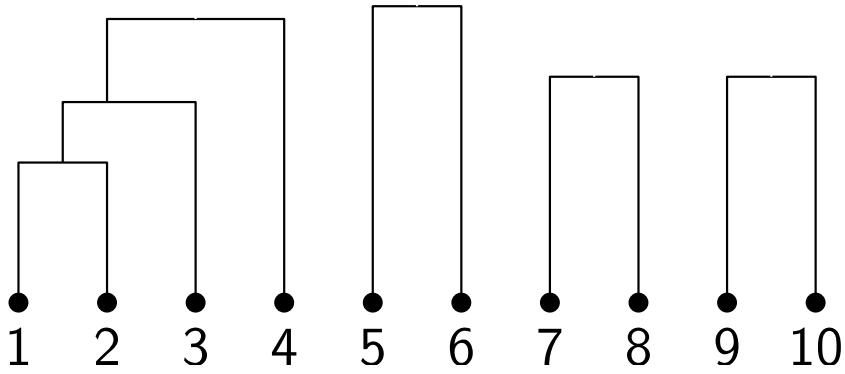
樹形図 (デンドログラム) の作成法



- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

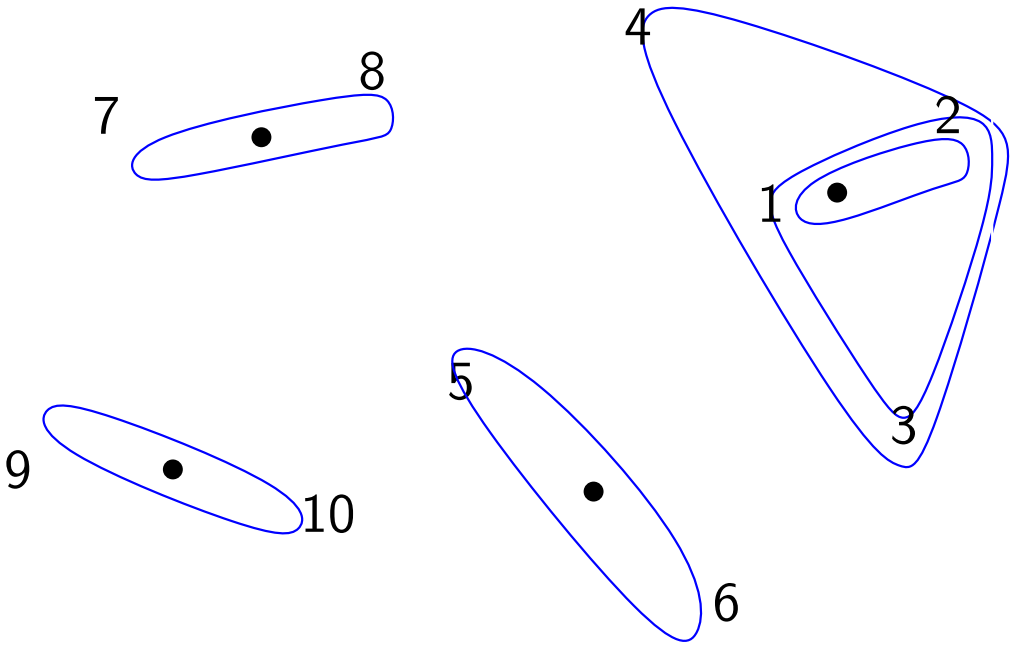
樹形図 (デンドログラム) の作成法

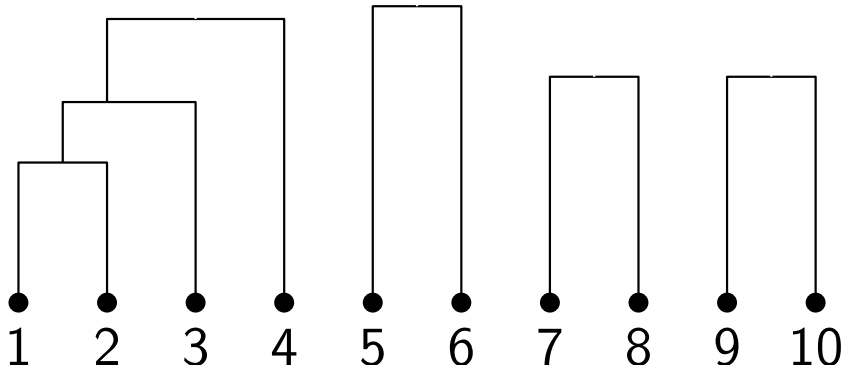




- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

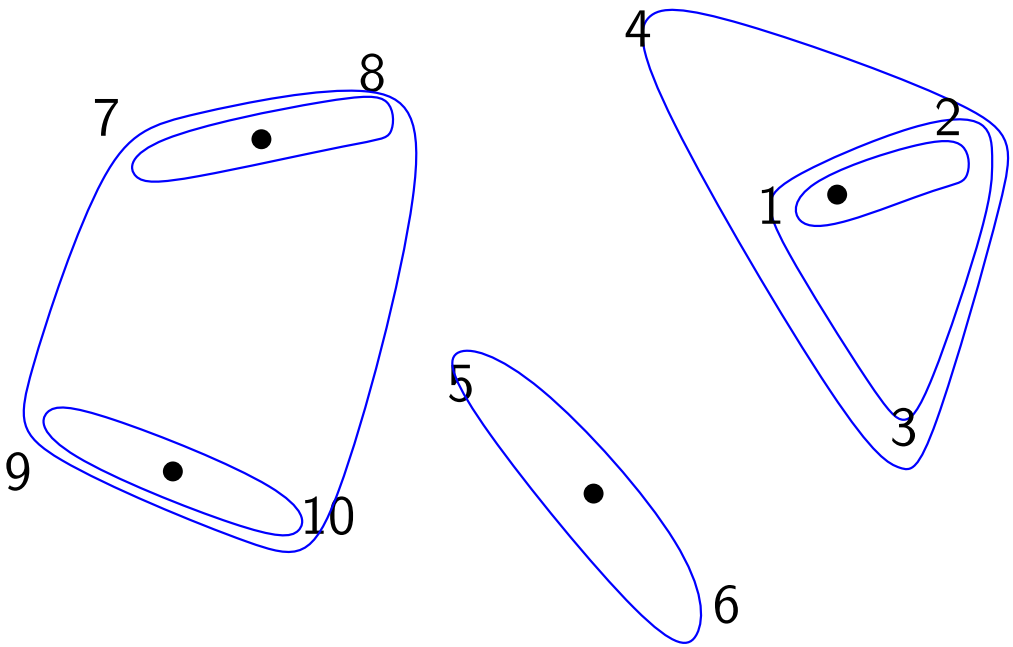
樹形図 (デンドログラム) の作成法

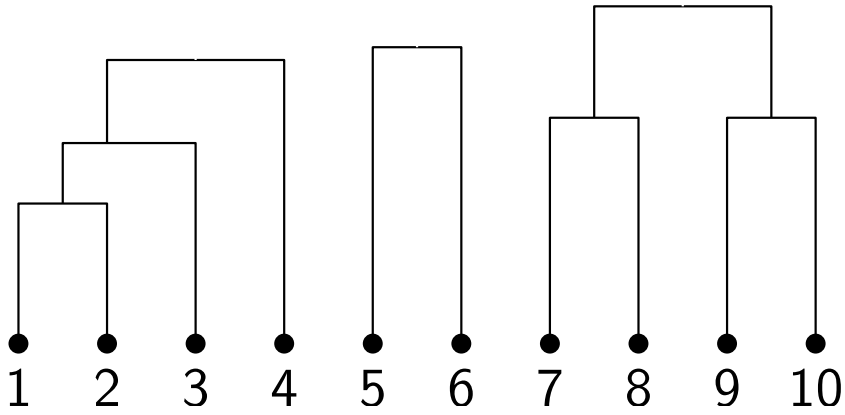




- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

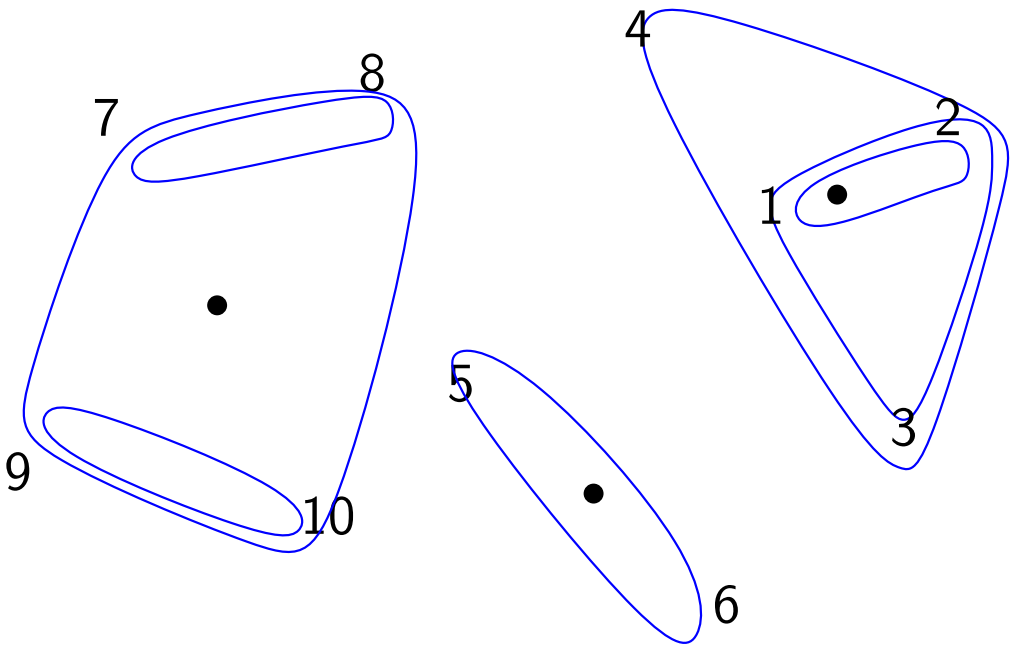
樹形図 (デンドログラム) の作成法

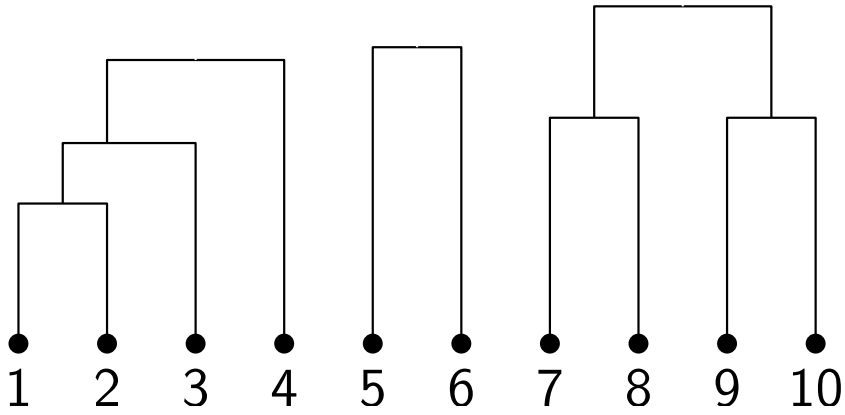




- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

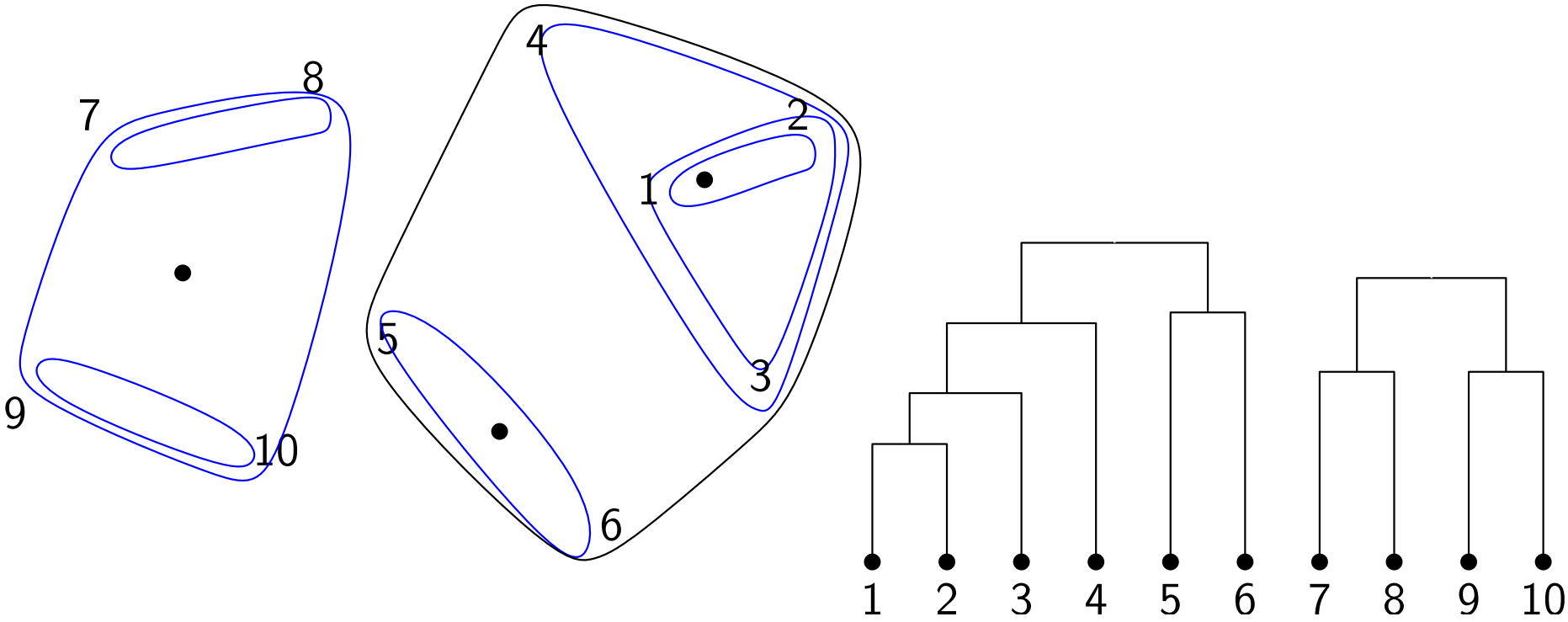
樹形図 (デンドログラム) の作成法





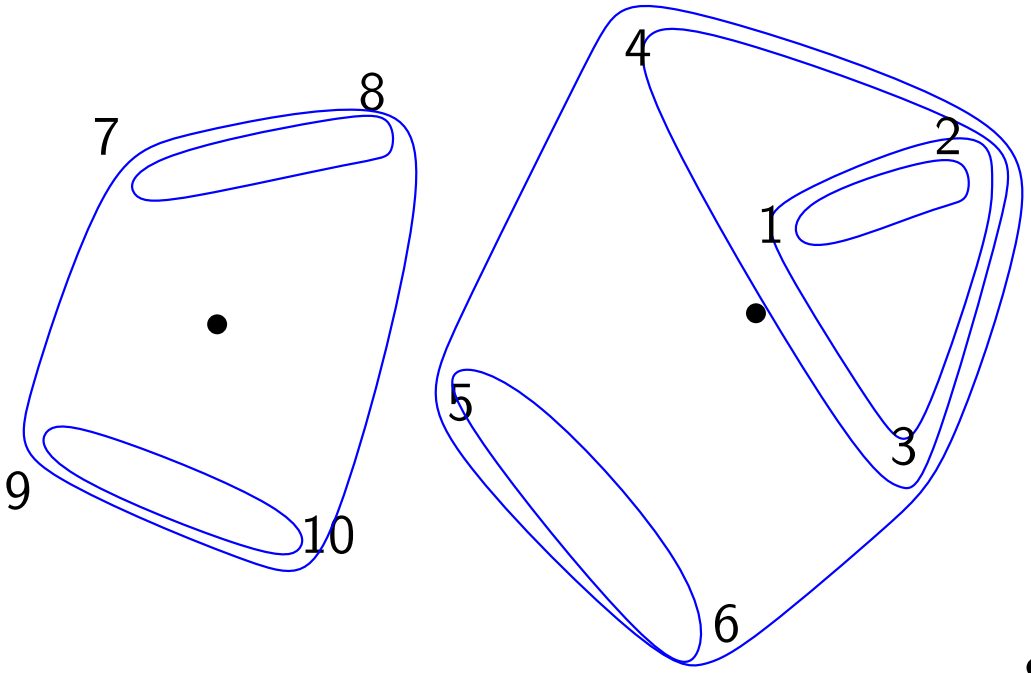
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

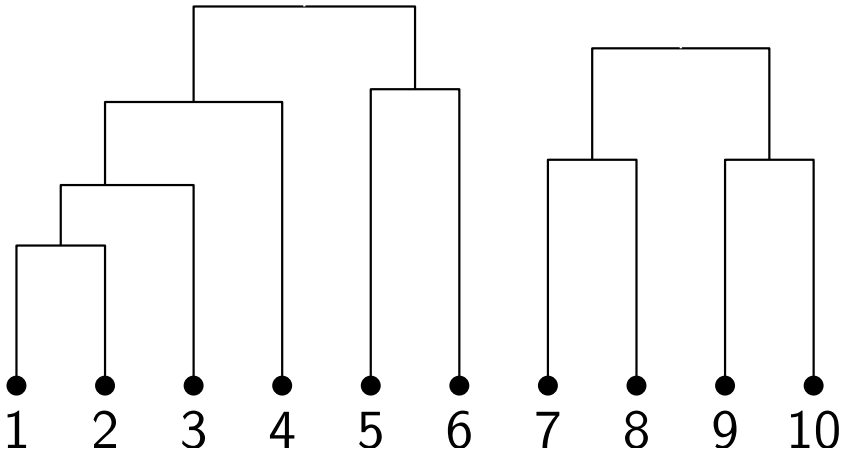
樹形図 (デンドログラム) の作成法



- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

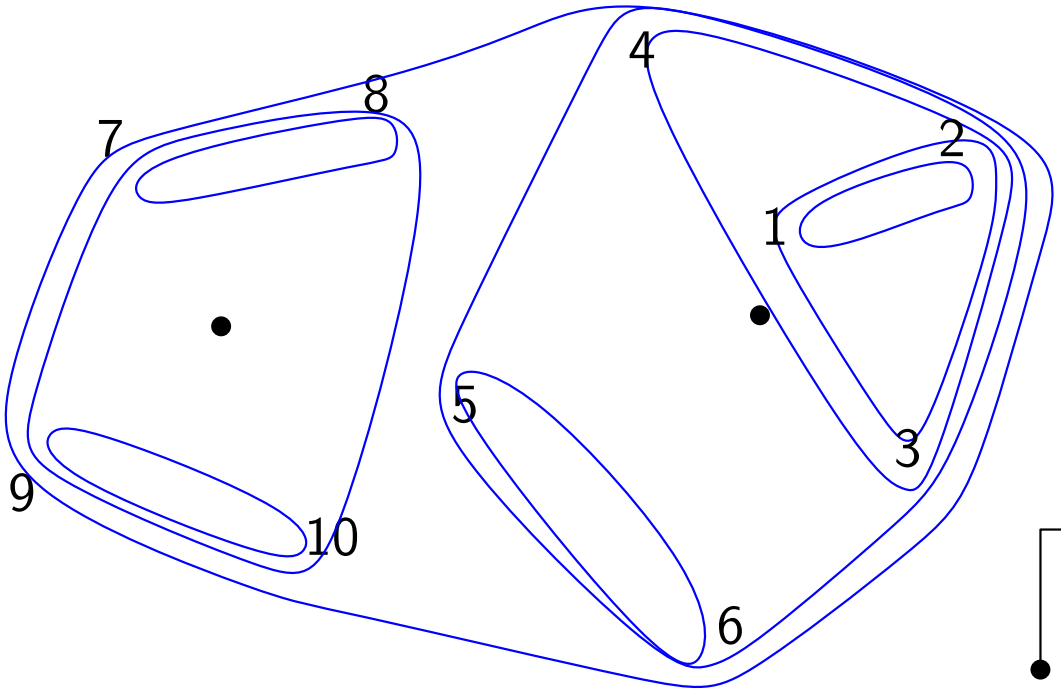
樹形図 (デンドログラム) の作成法

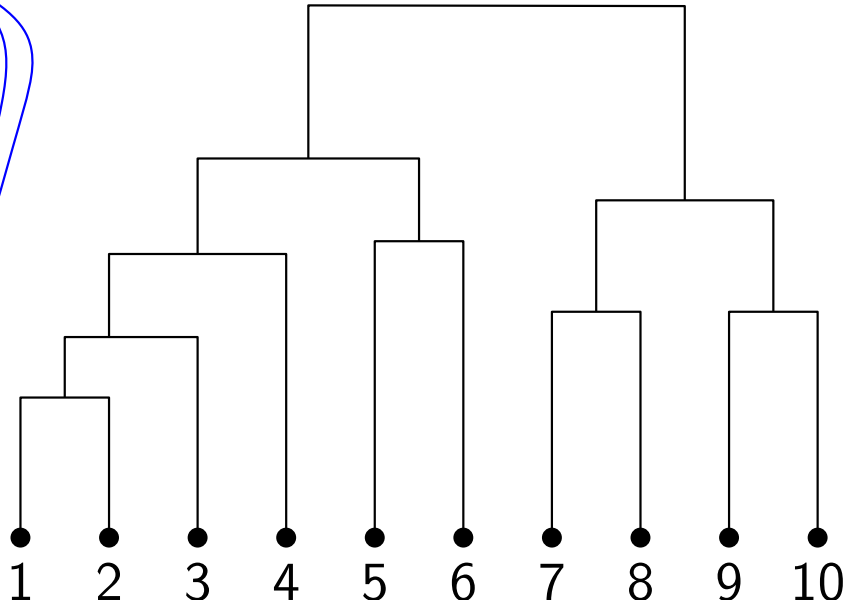




- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

樹形図 (デンドログラム) の作成法





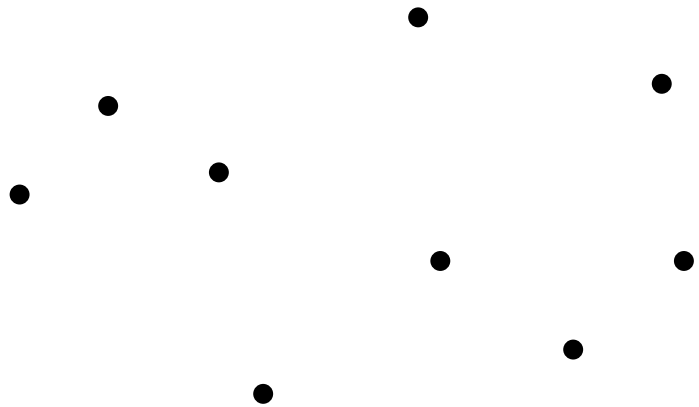
- 最も近い 2 つのものをまとめる
- それらをその重心で置き換える

距離を用いた検索

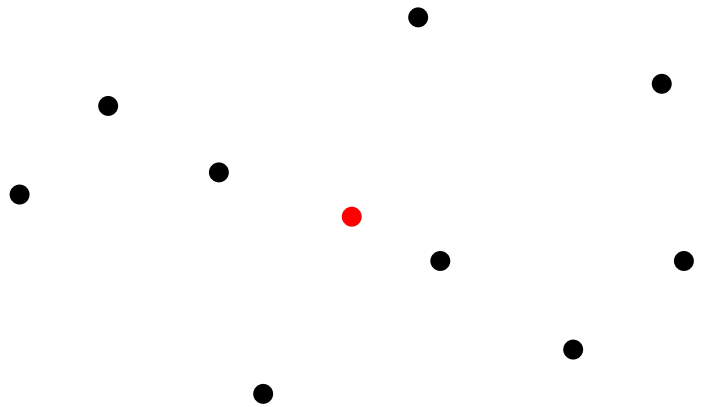
応用例

- 店舗検索
- 商品推薦

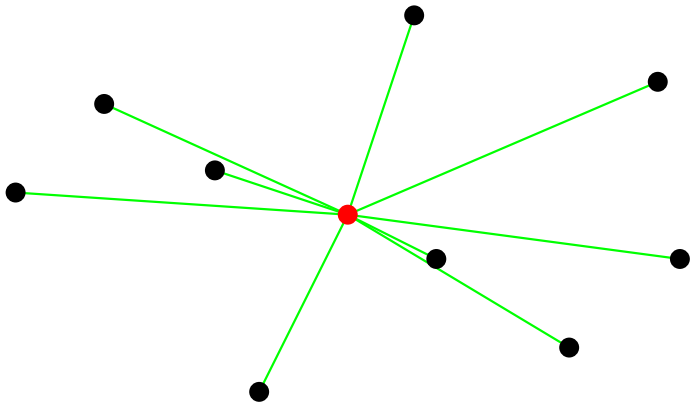
一番近い点を見つけるには，どうすればよいか？



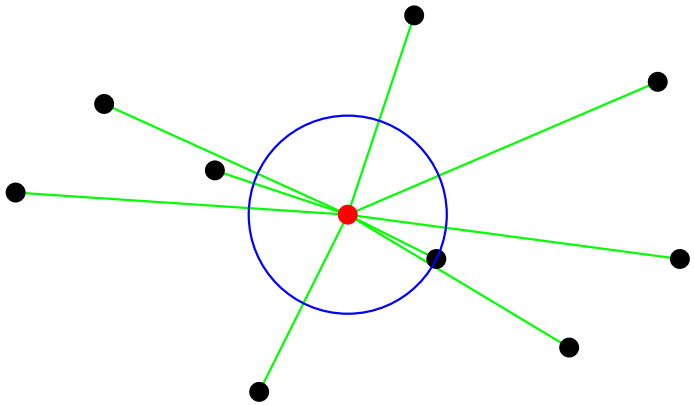
一番近い点を見つけるには，どうすればよいか？



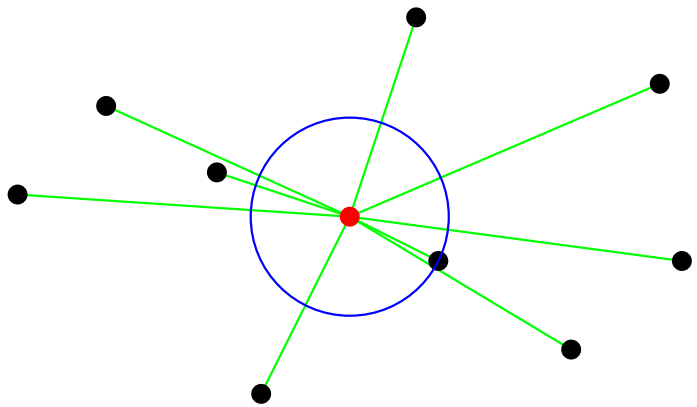
一番近い点を見つけるには，どうすればよいか？



一番近い点を見つけるには，どうすればよいか？



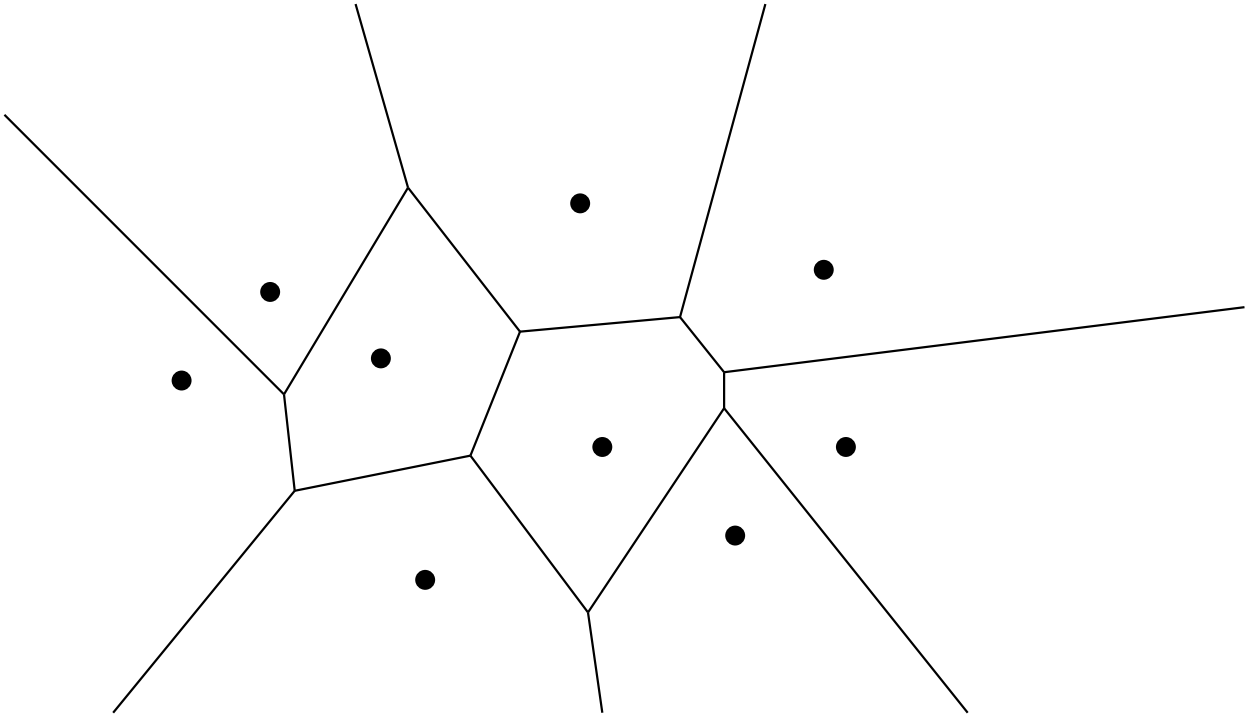
一番近い点を見つけるには，どうすればよいか?: 効率性



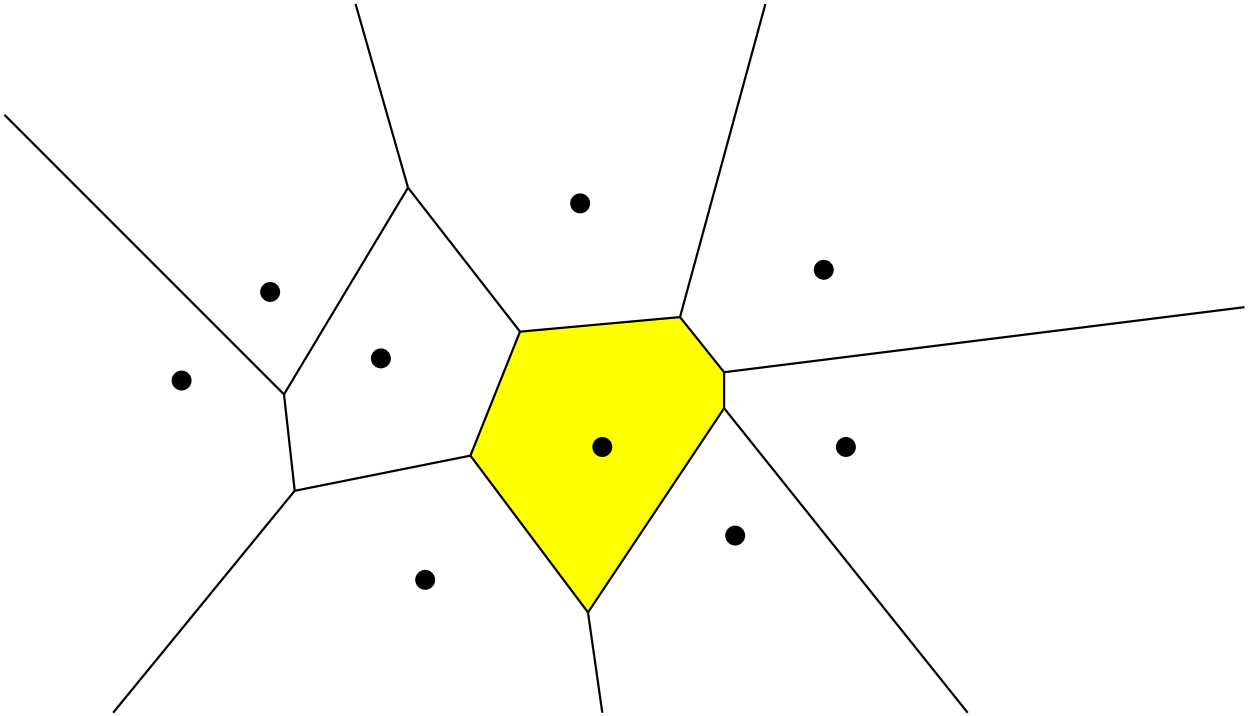
→ すべての点を見る必要がある

($O(n)$ 時間アルゴリズム)

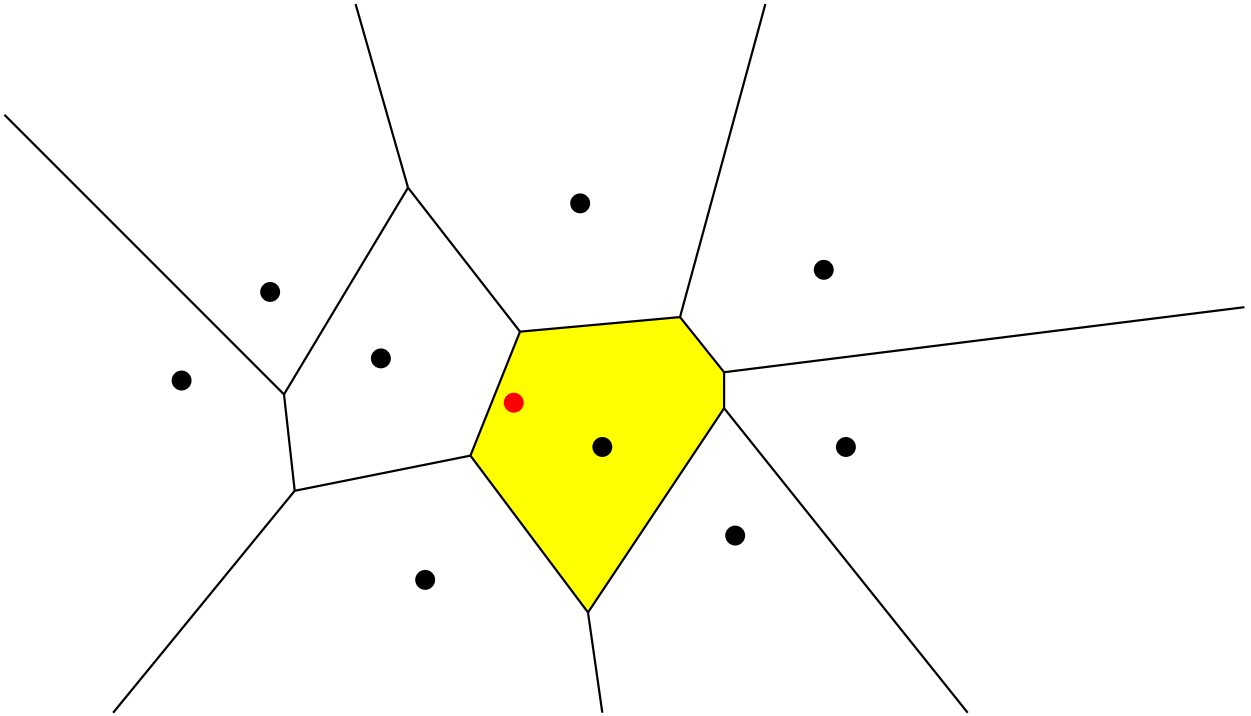
Voronoi 図



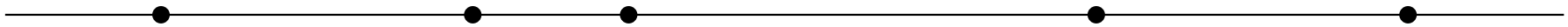
Voronoi 図



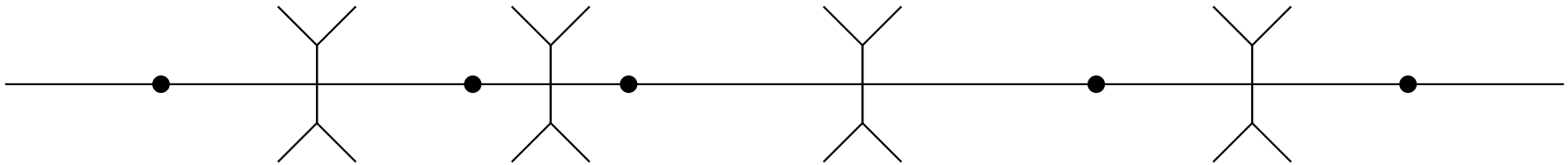
Voronoi 図



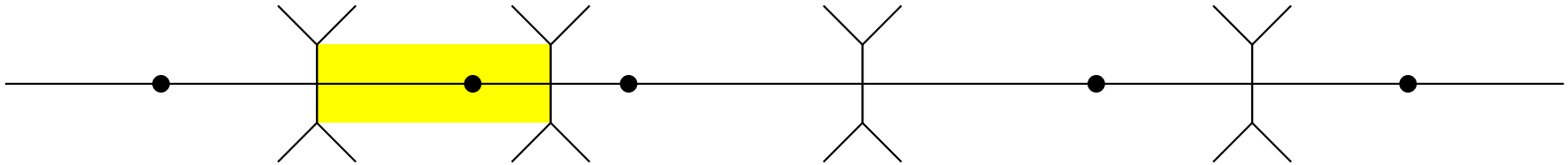
Voronoi 図：1 次元の場合



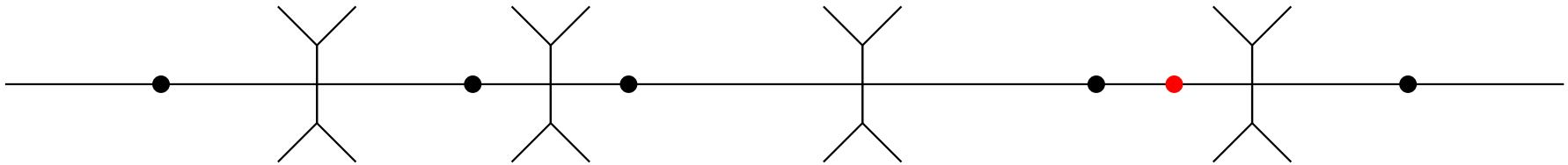
Voronoi 図：1 次元の場合



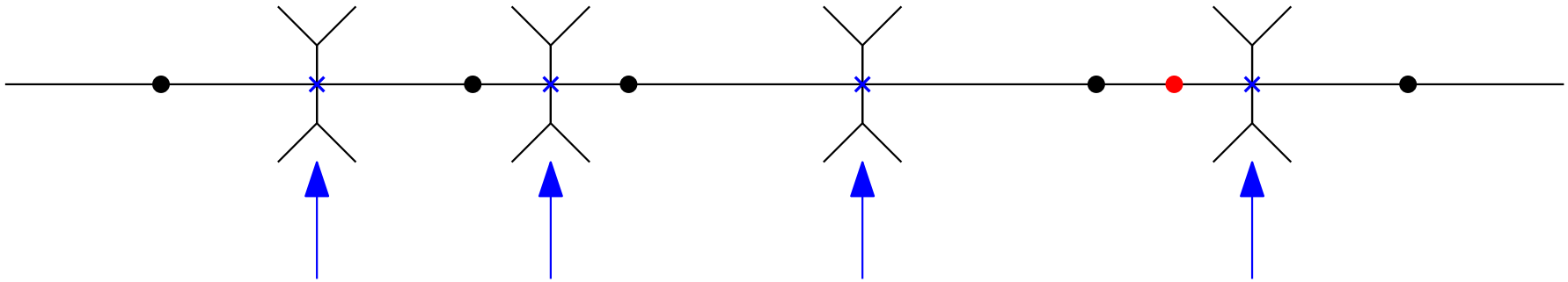
Voronoi 図：1 次元の場合



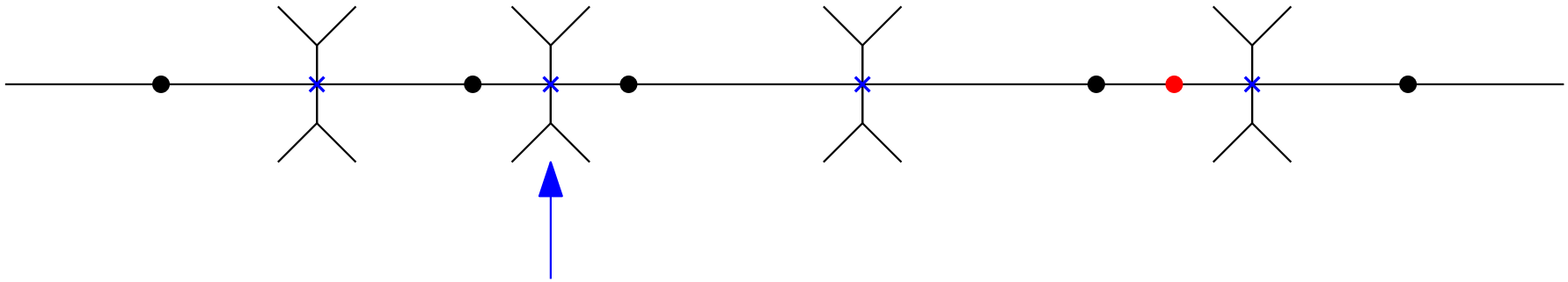
Voronoi 図：1 次元の場合



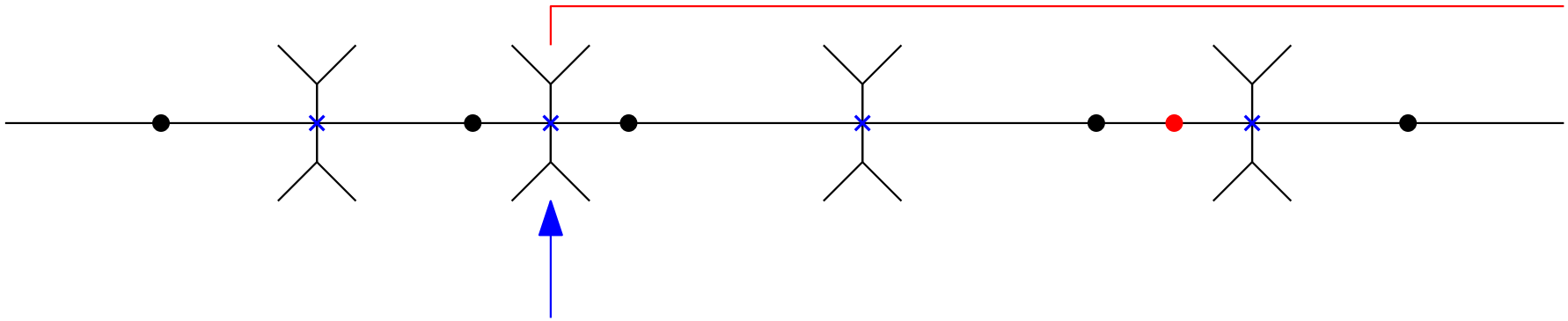
Voronoi 図：1 次元の場合



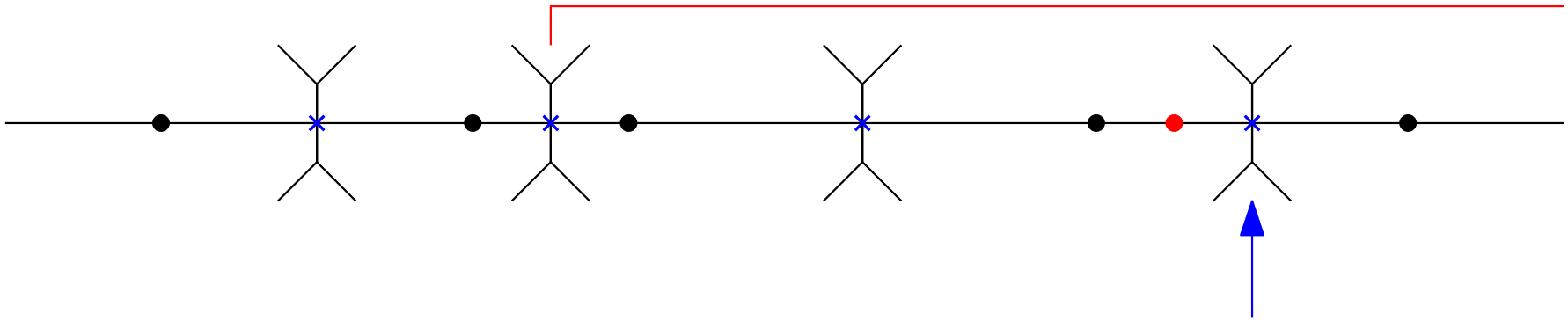
Voronoi 図：1 次元の場合



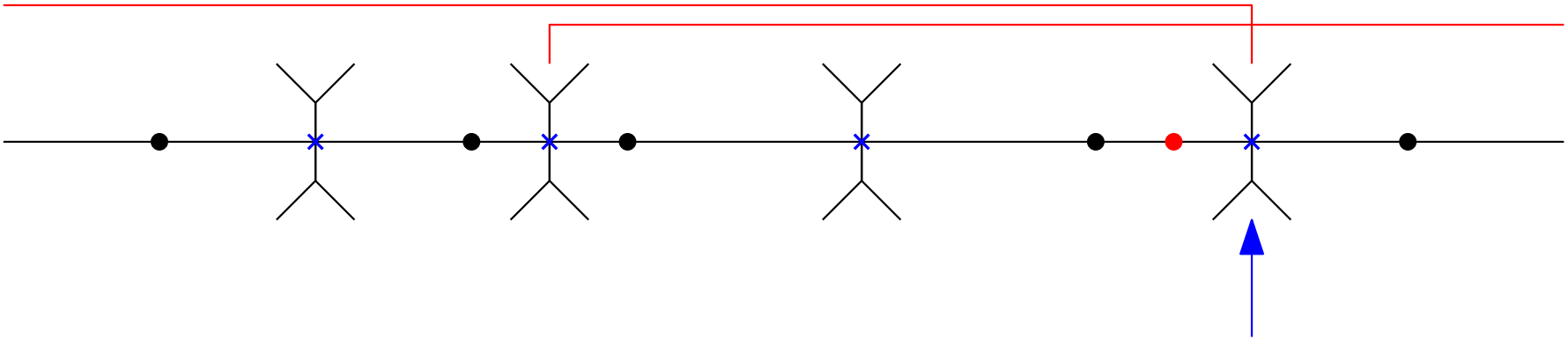
Voronoi 図：1 次元の場合



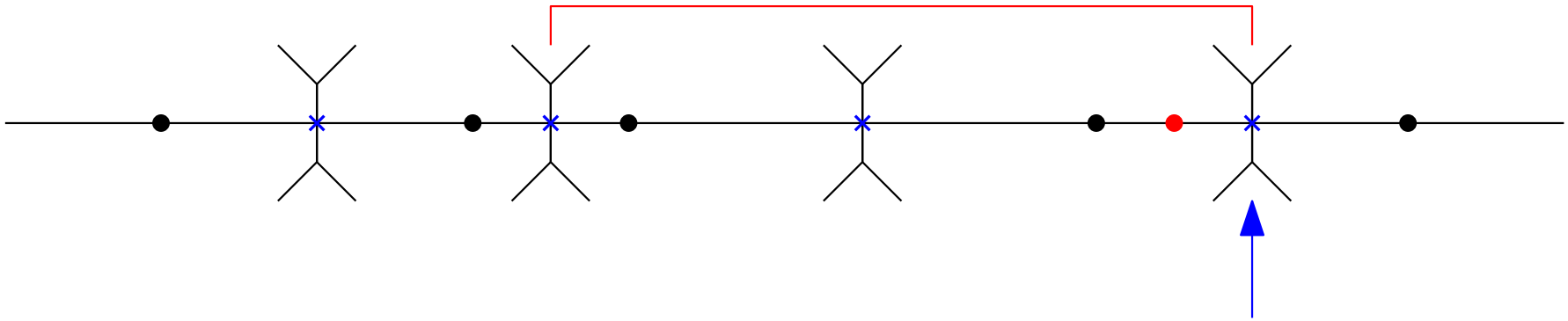
Voronoi 図：1 次元の場合



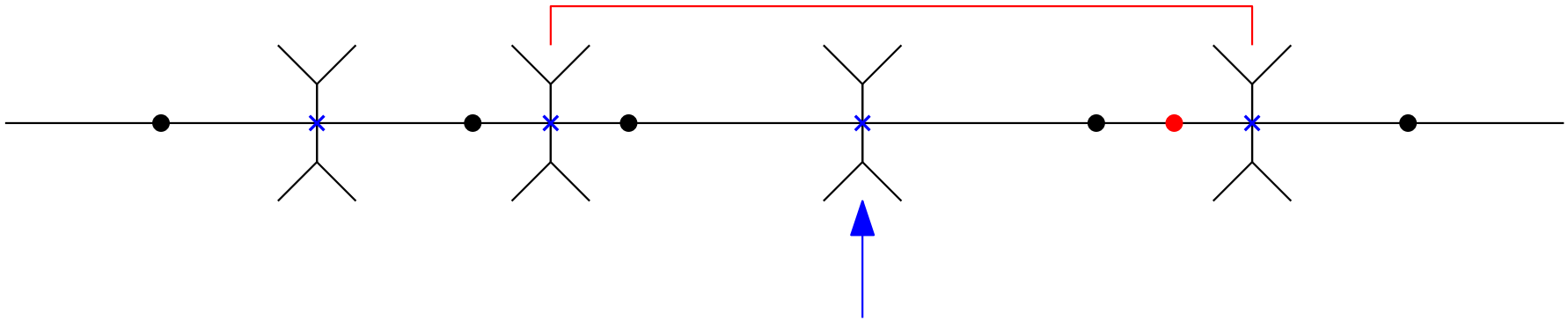
Voronoi 図：1 次元の場合



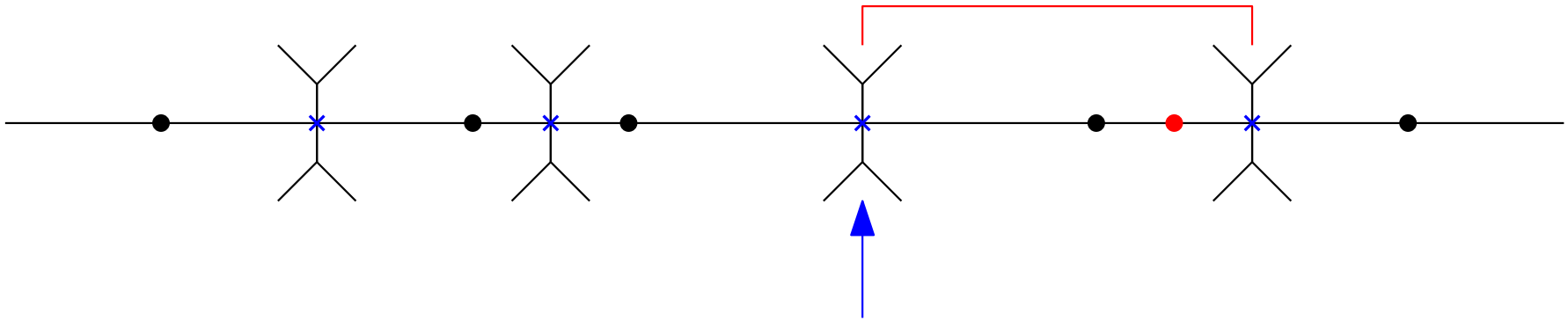
Voronoi 図：1 次元の場合



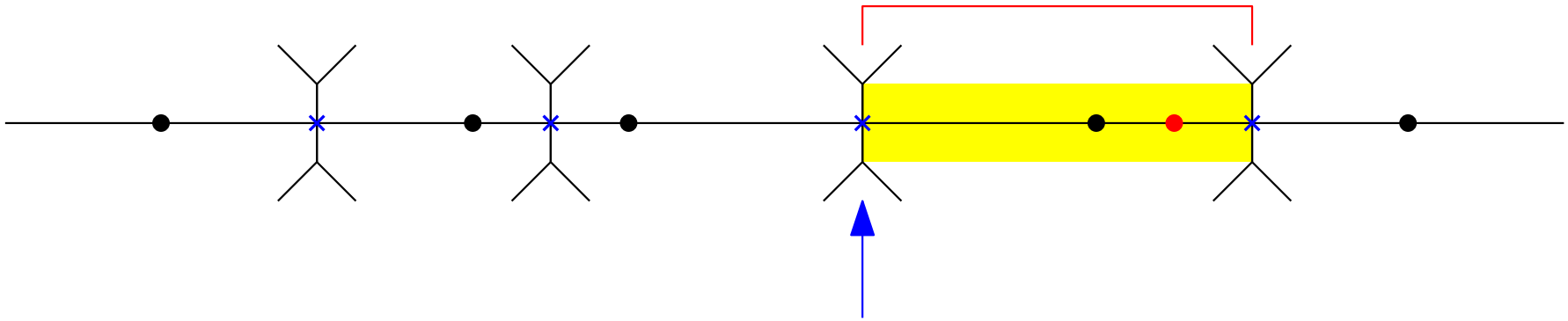
Voronoi 図：1 次元の場合



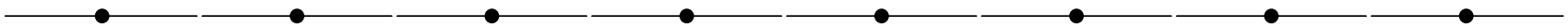
Voronoi 図：1 次元の場合



Voronoi 図：1 次元の場合

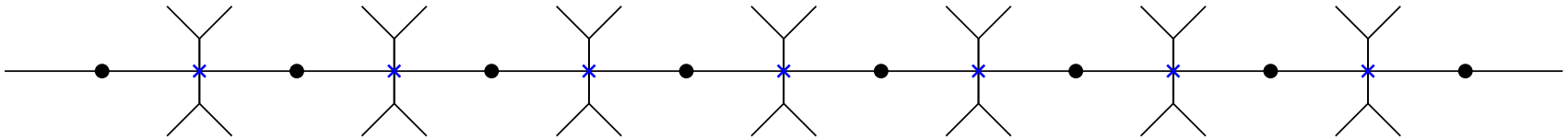


Voronoi 図：1 次元の場合



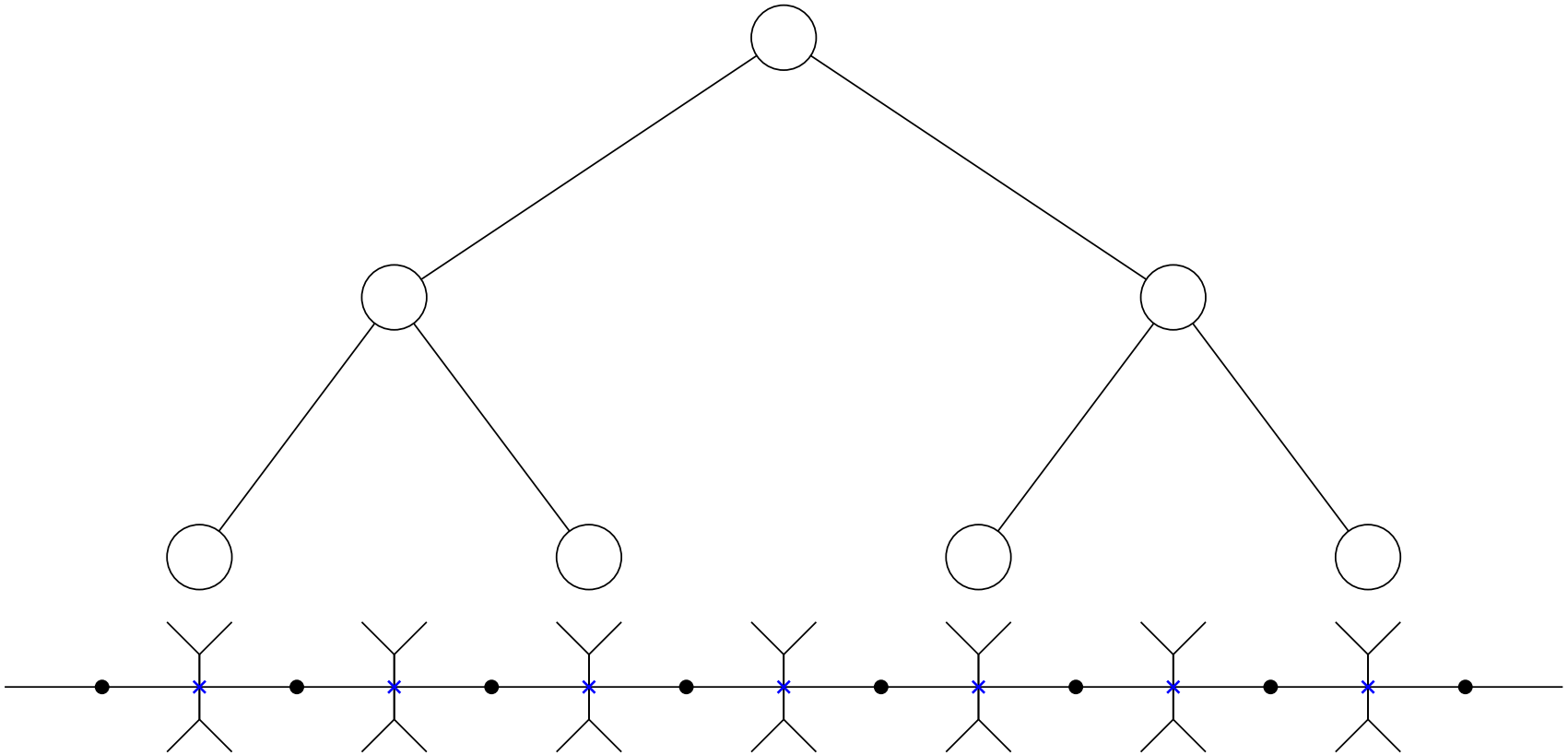
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



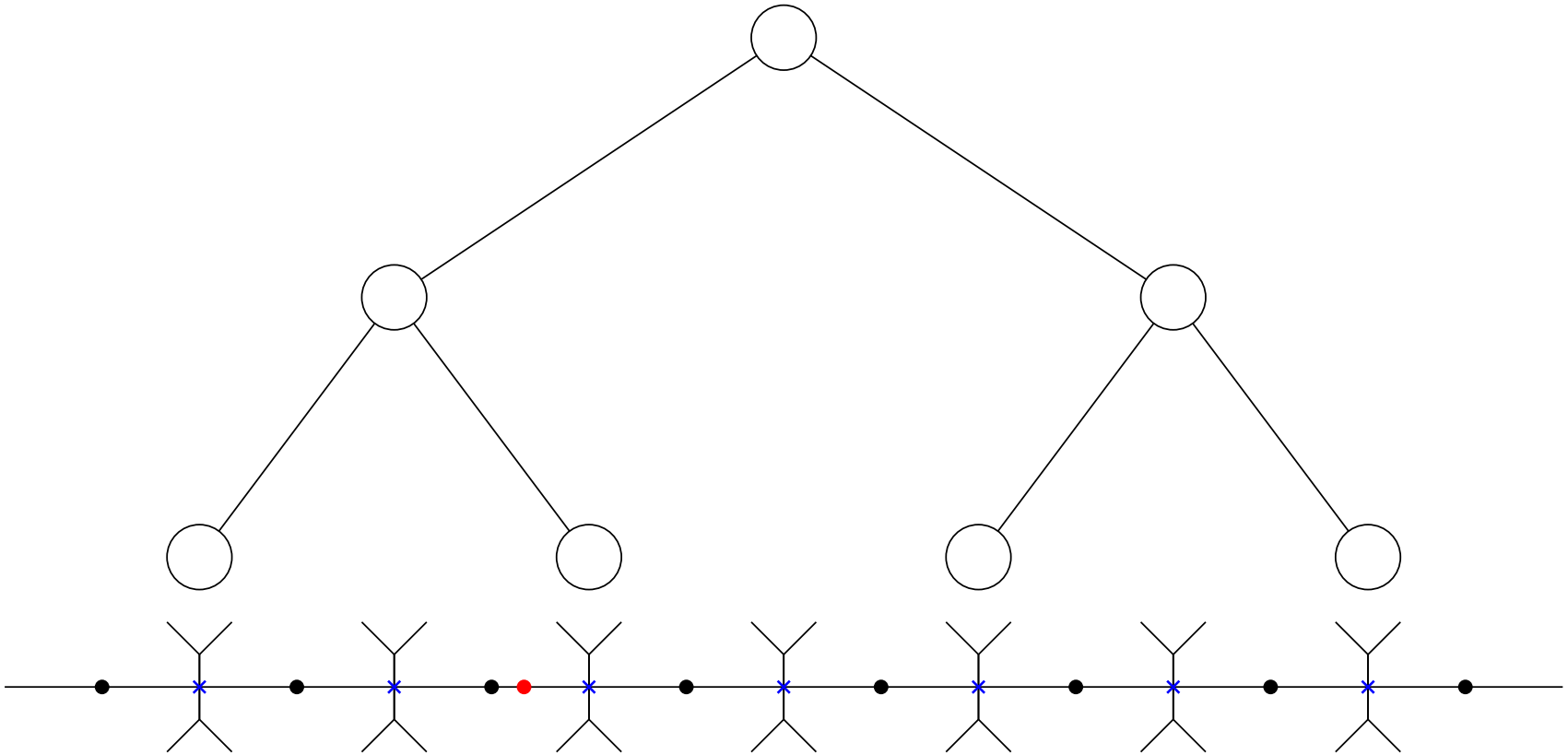
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



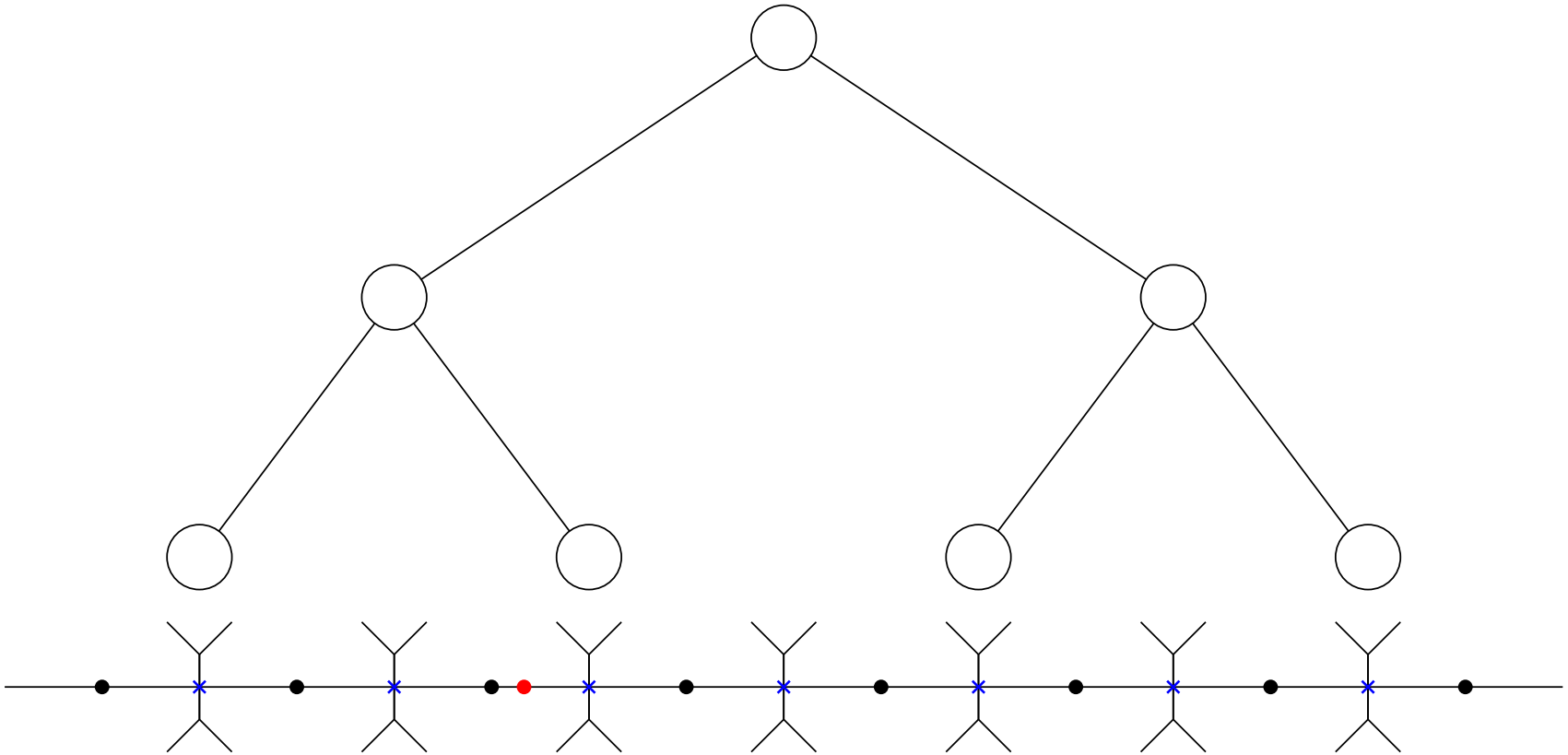
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



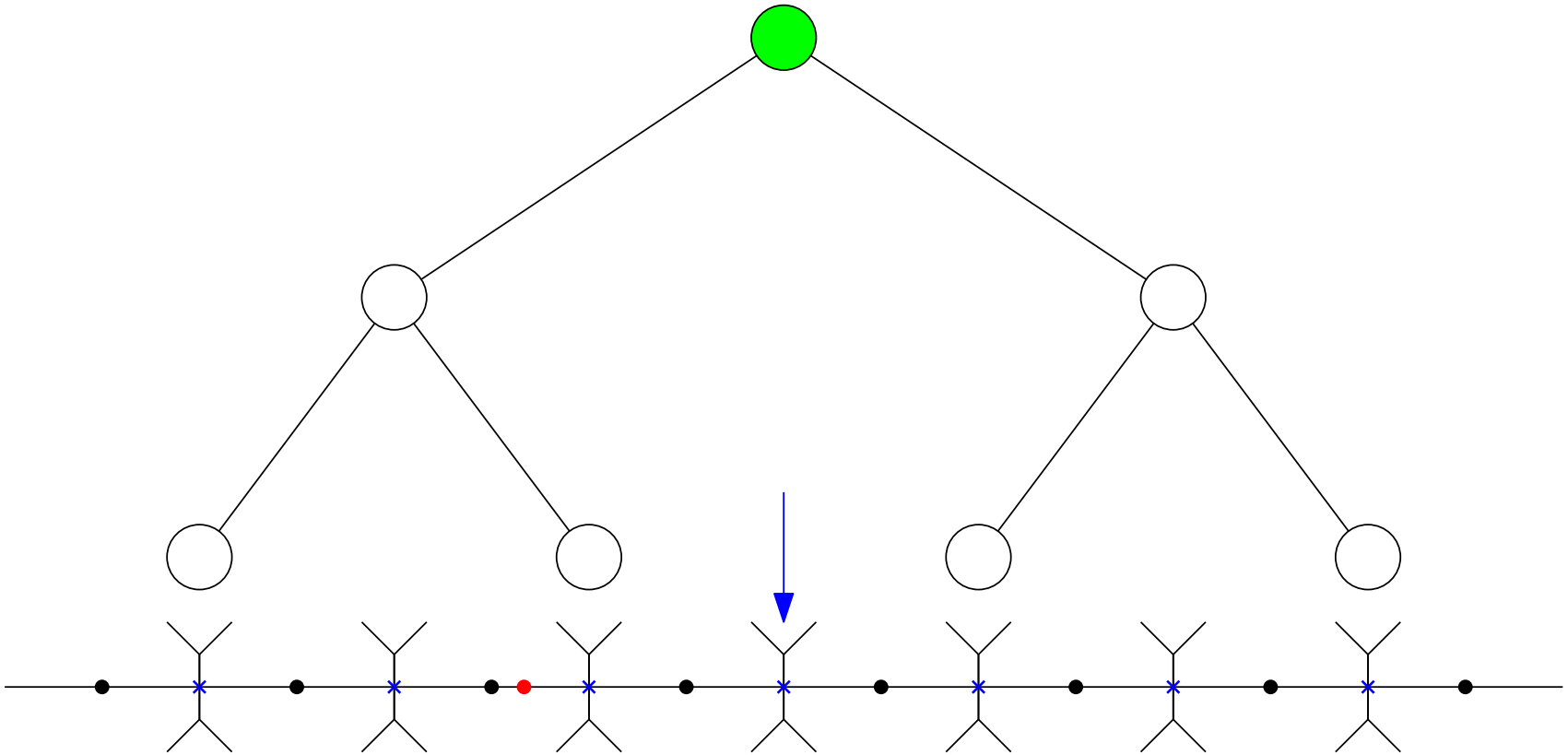
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



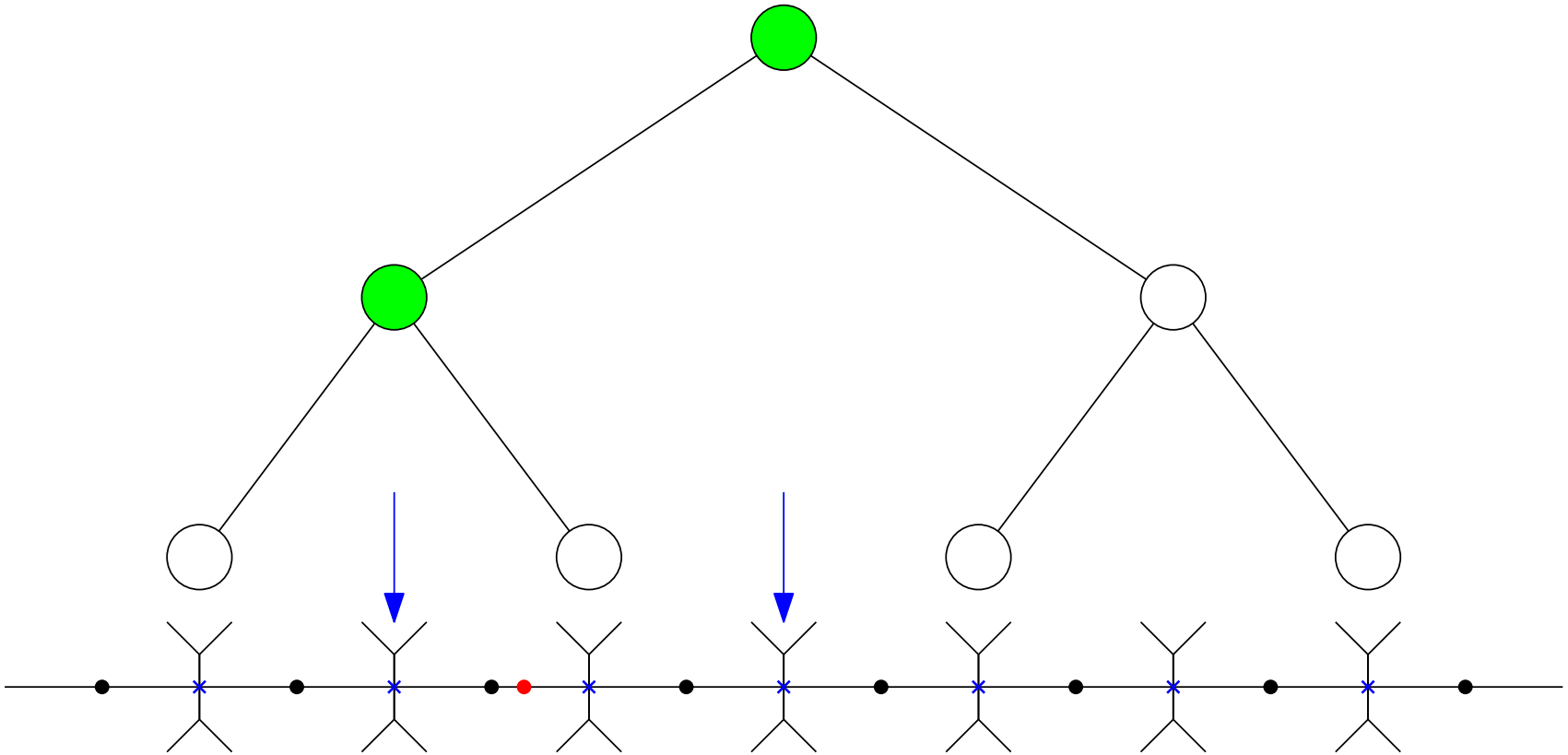
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



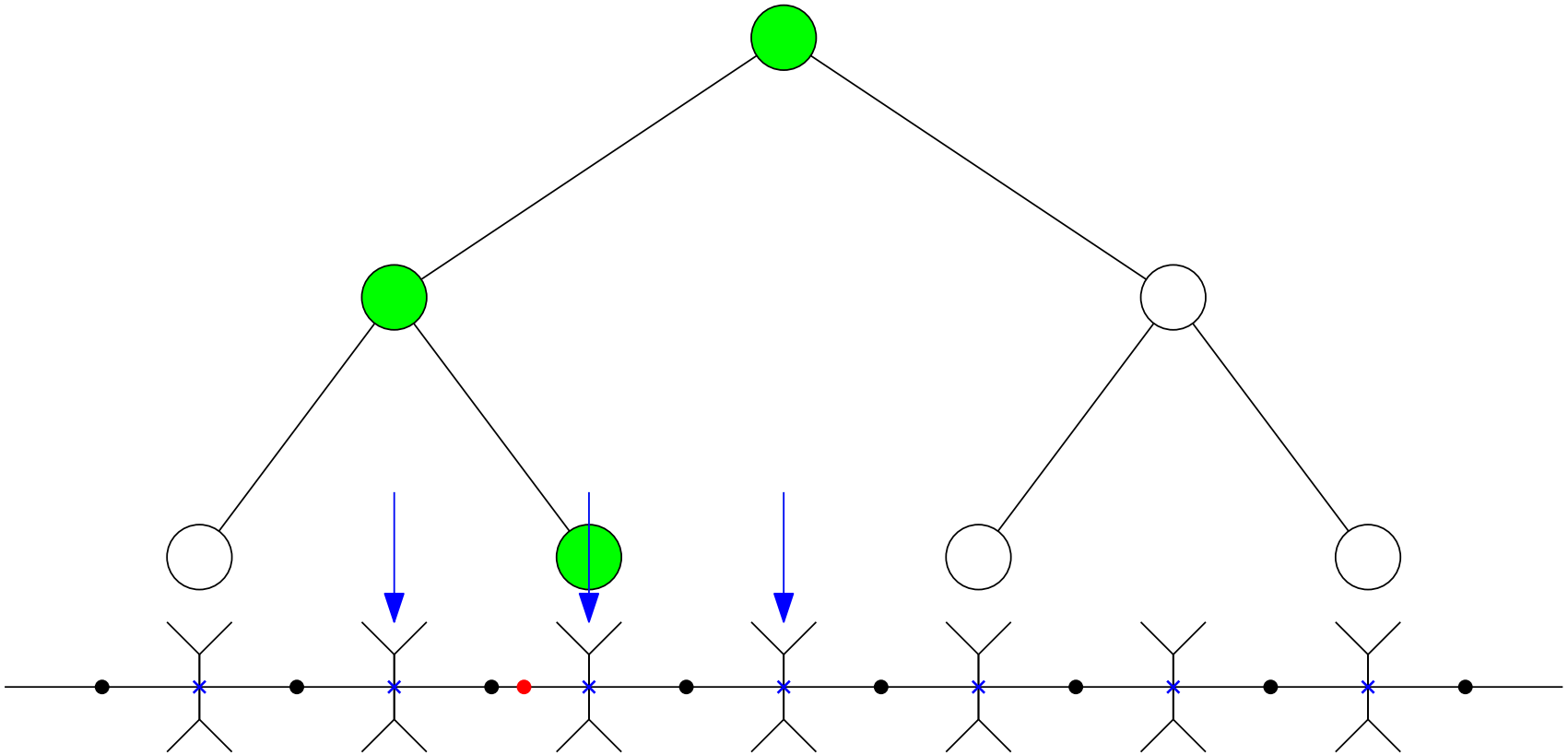
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



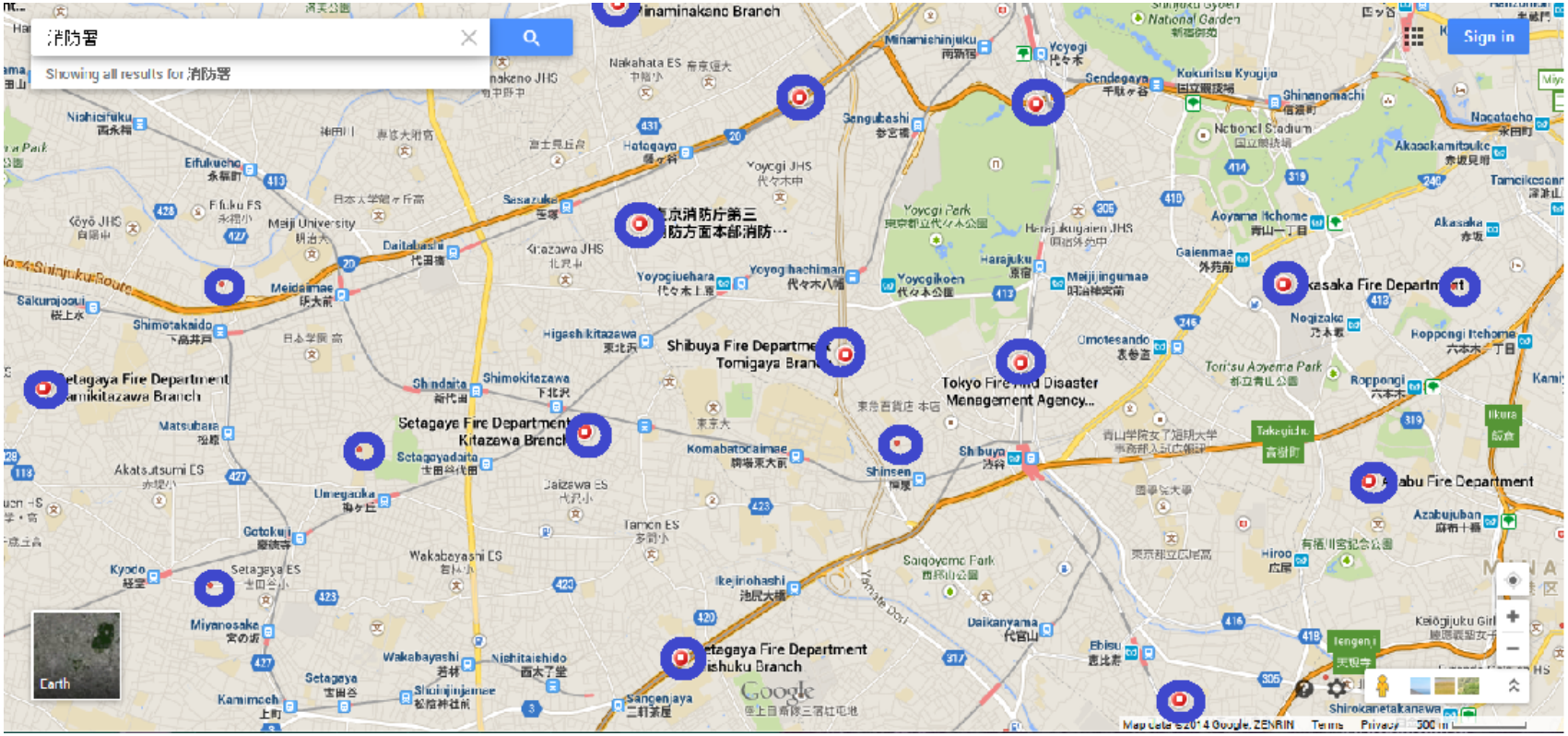
二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

Voronoi 図：1 次元の場合



二分探索 ($O(\log n)$ 時間アルゴリズム)

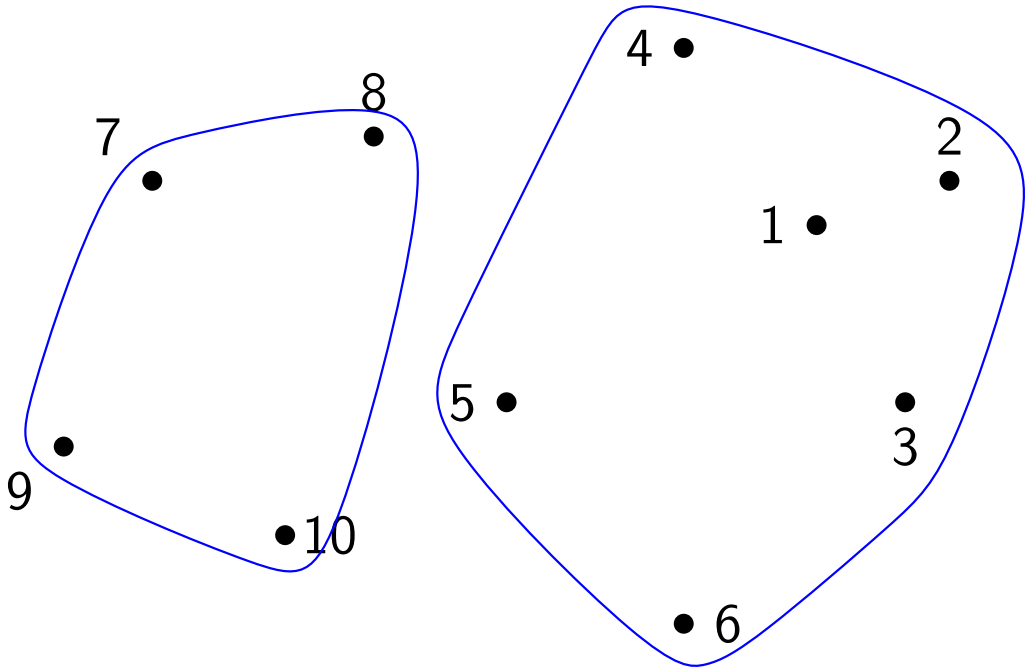
距離を用いた配置



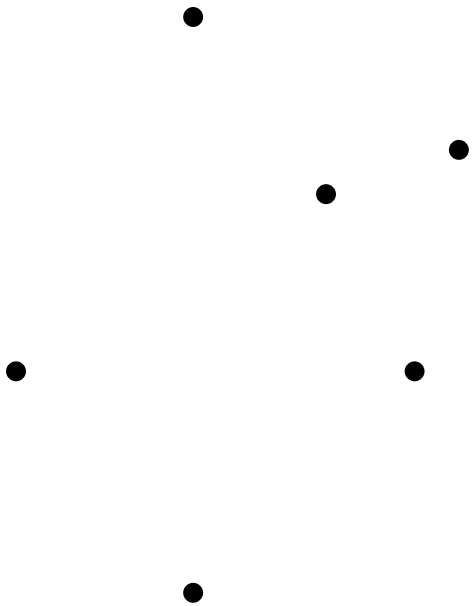
応用例

- 施設配置
- 要約

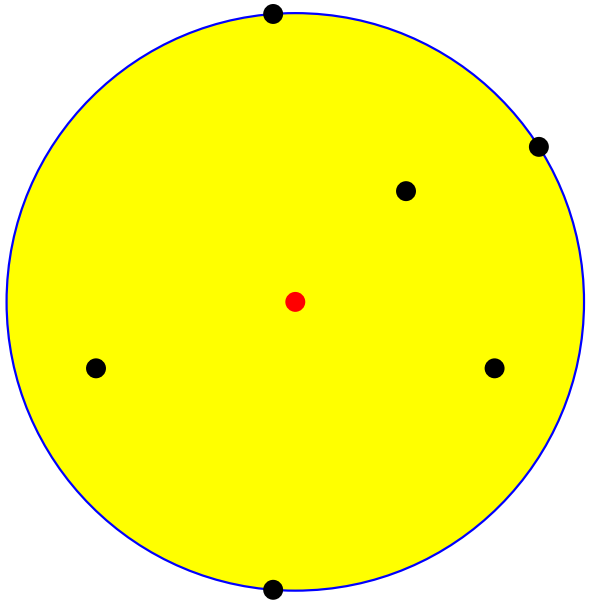
施設配置



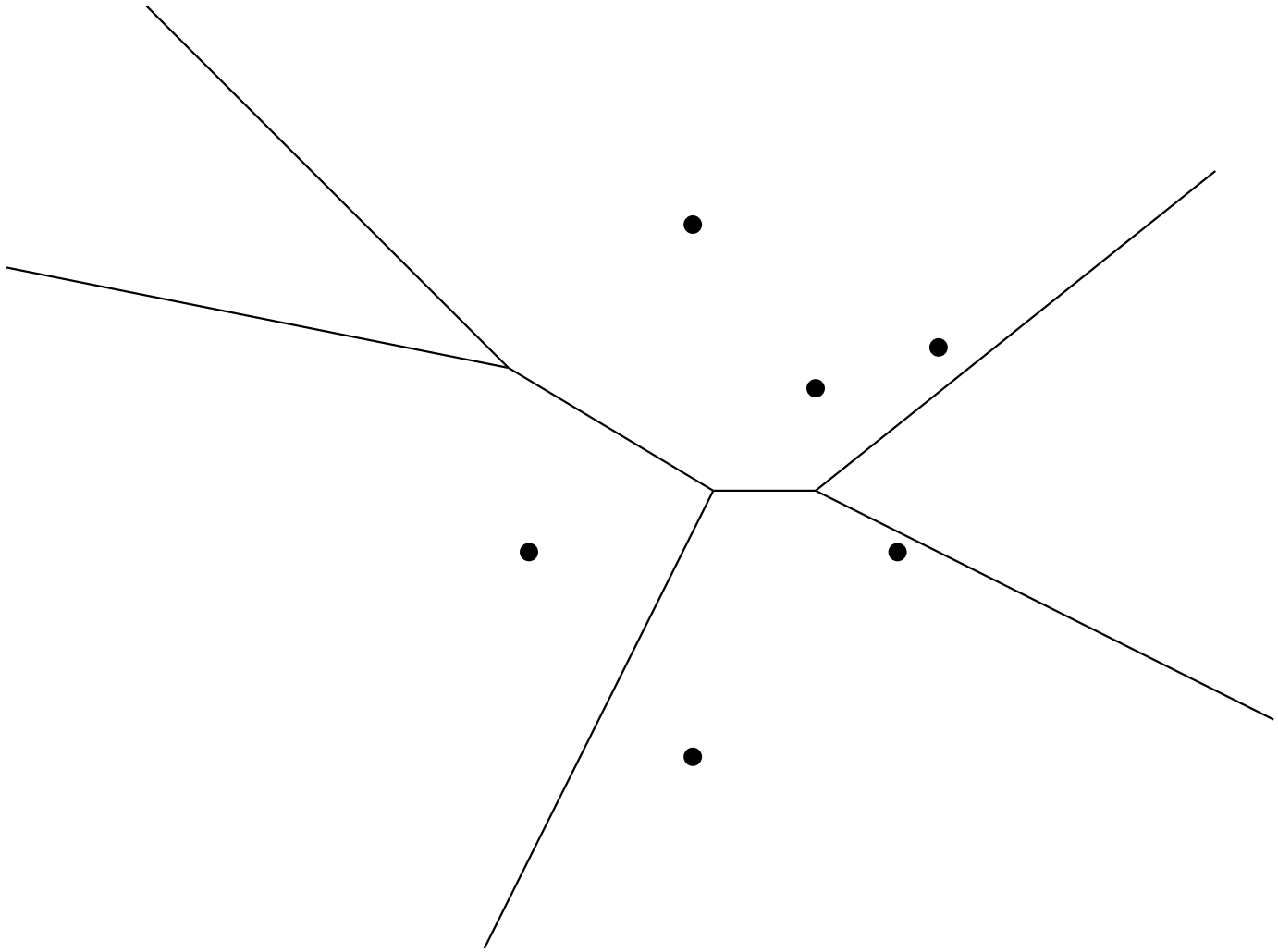
施設配置



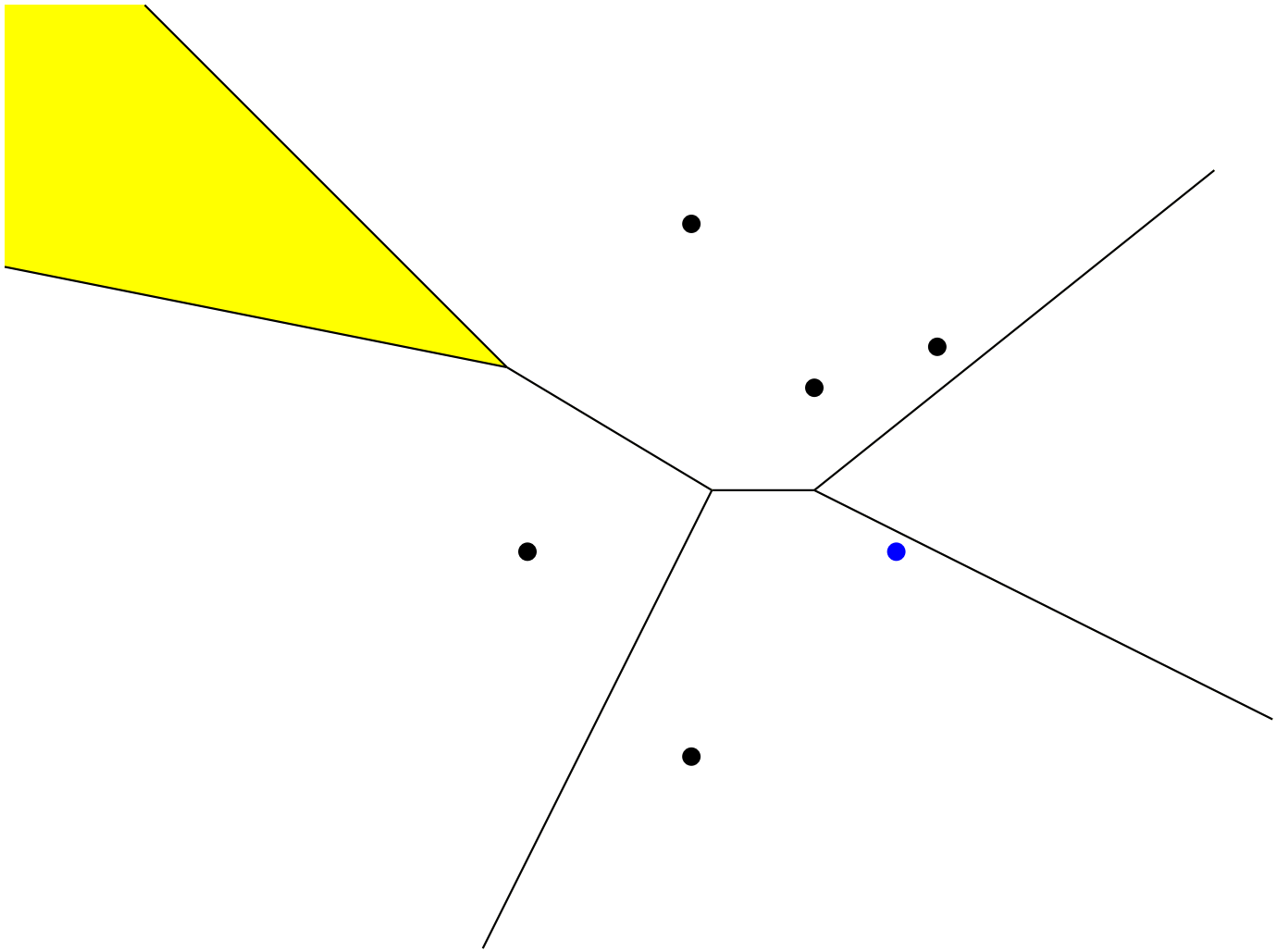
施設配置：最小包含円の中心



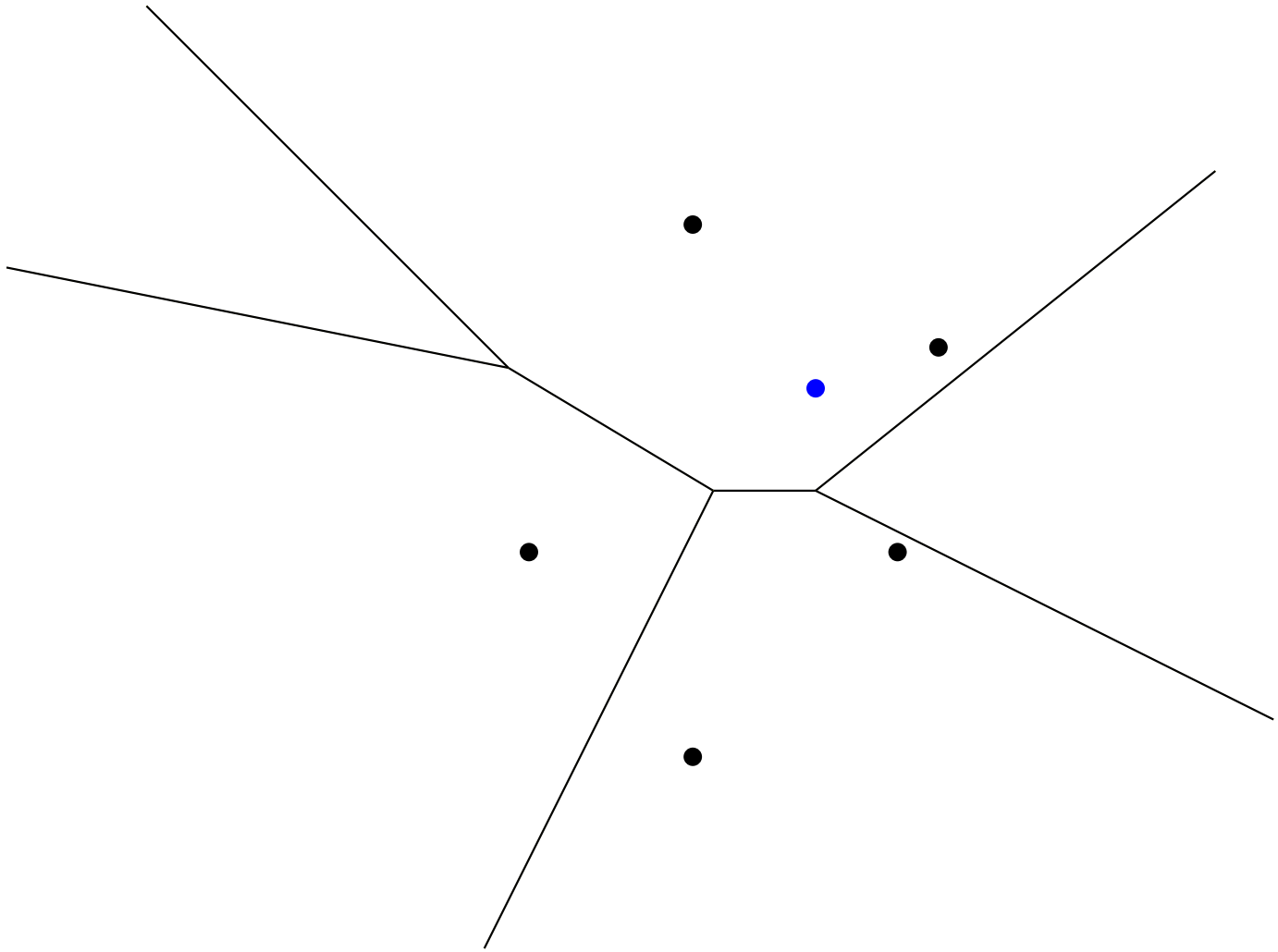
施設配置：最遠点 Voronoi 図



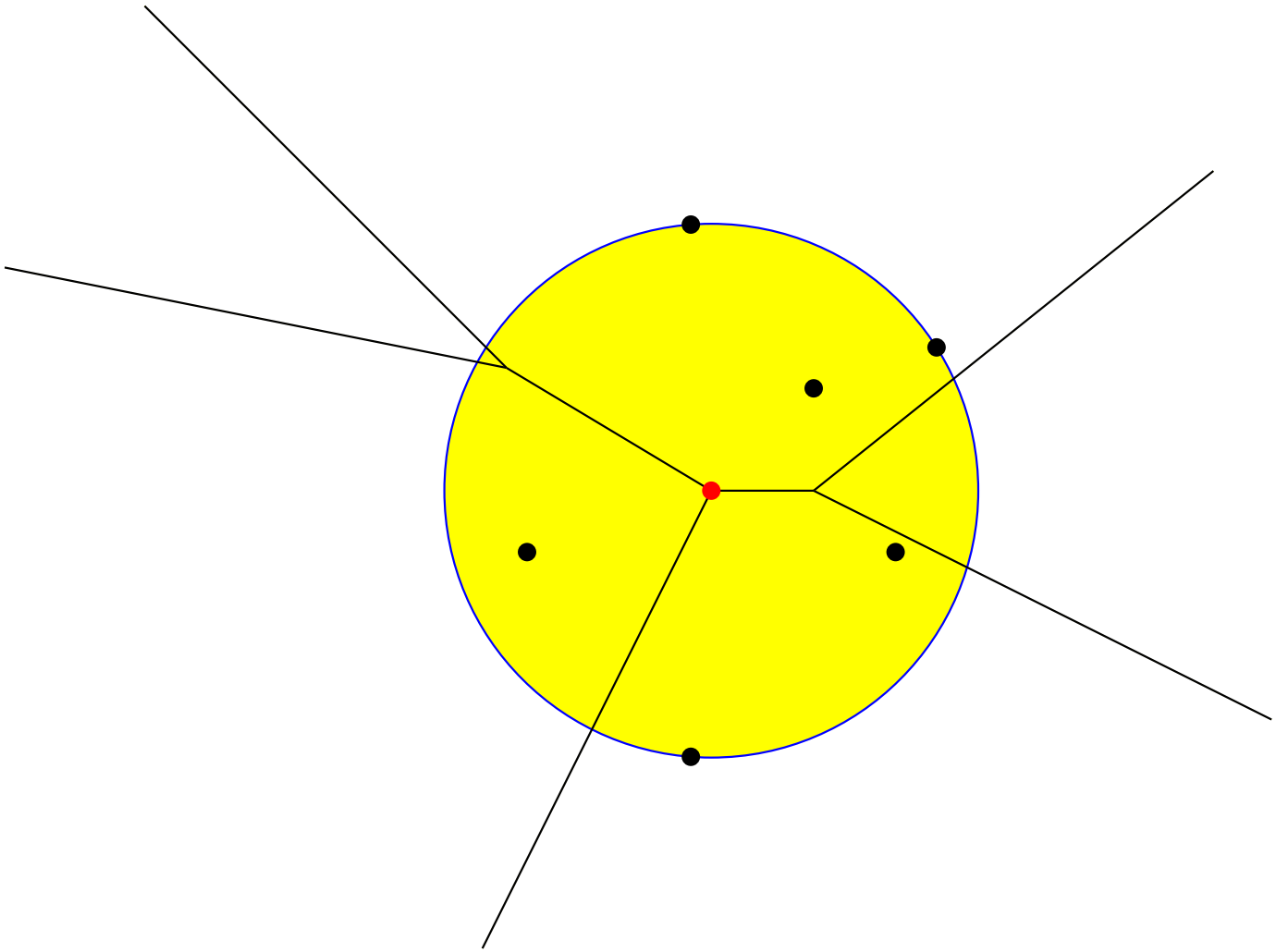
施設配置：最遠点 Voronoi 図



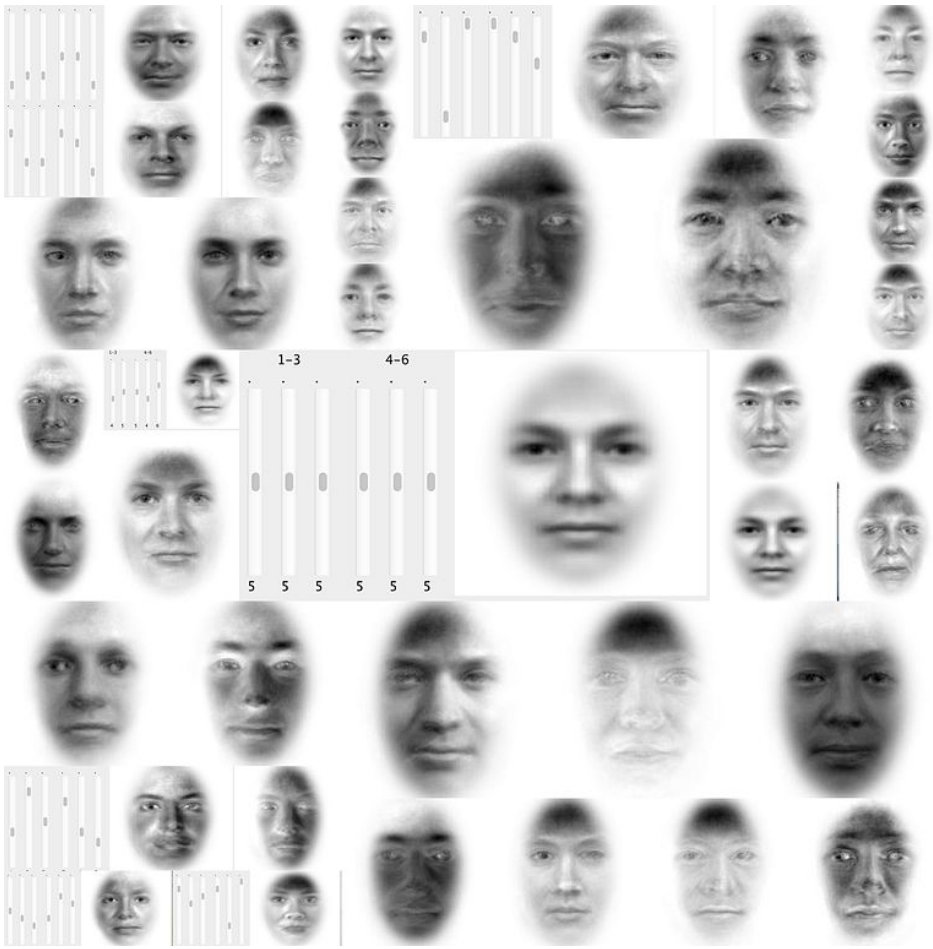
施設配置：最遠点 Voronoi 図



施設配置：最遠点 Voronoi 図と最小包含円



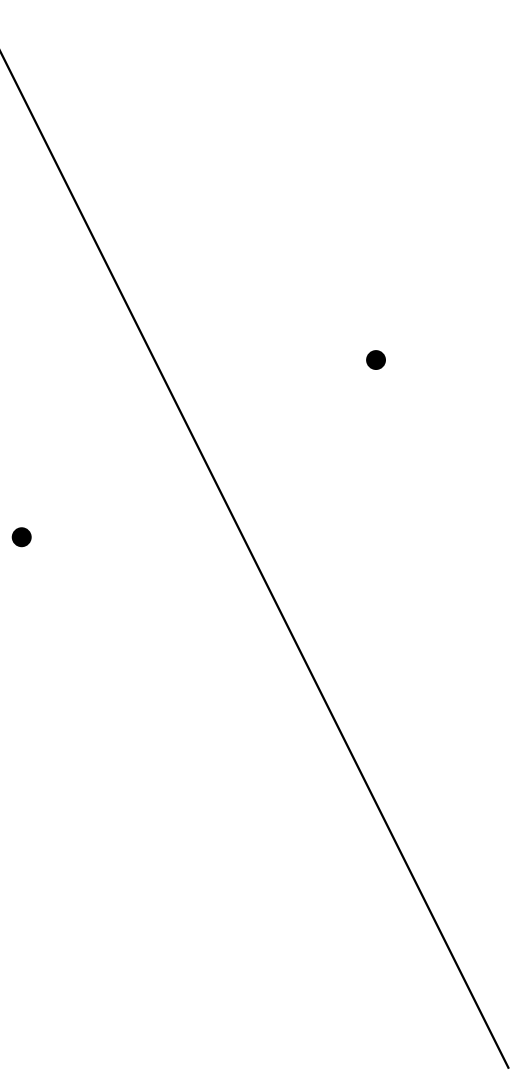
画像認識における要約の応用：固有顔 (eigenface)



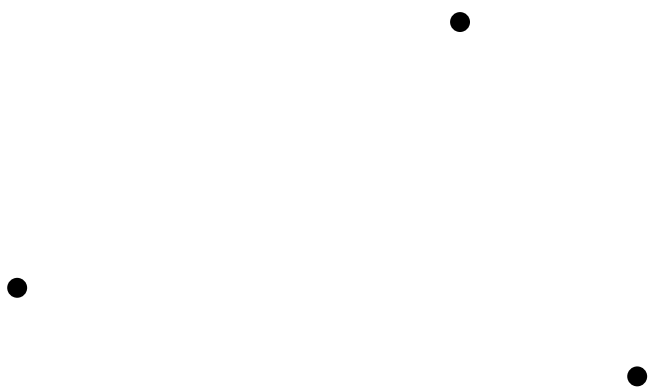
http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenface

練習：Voronoi 図を描いてみる

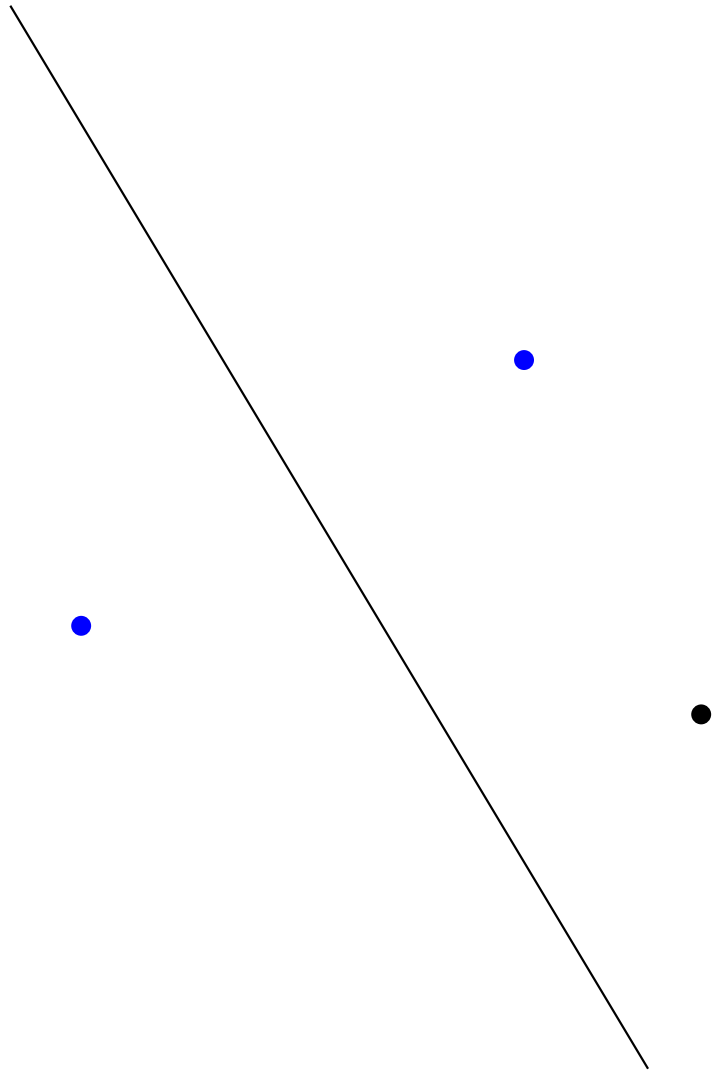
練習：Voronoi 図を描いてみる



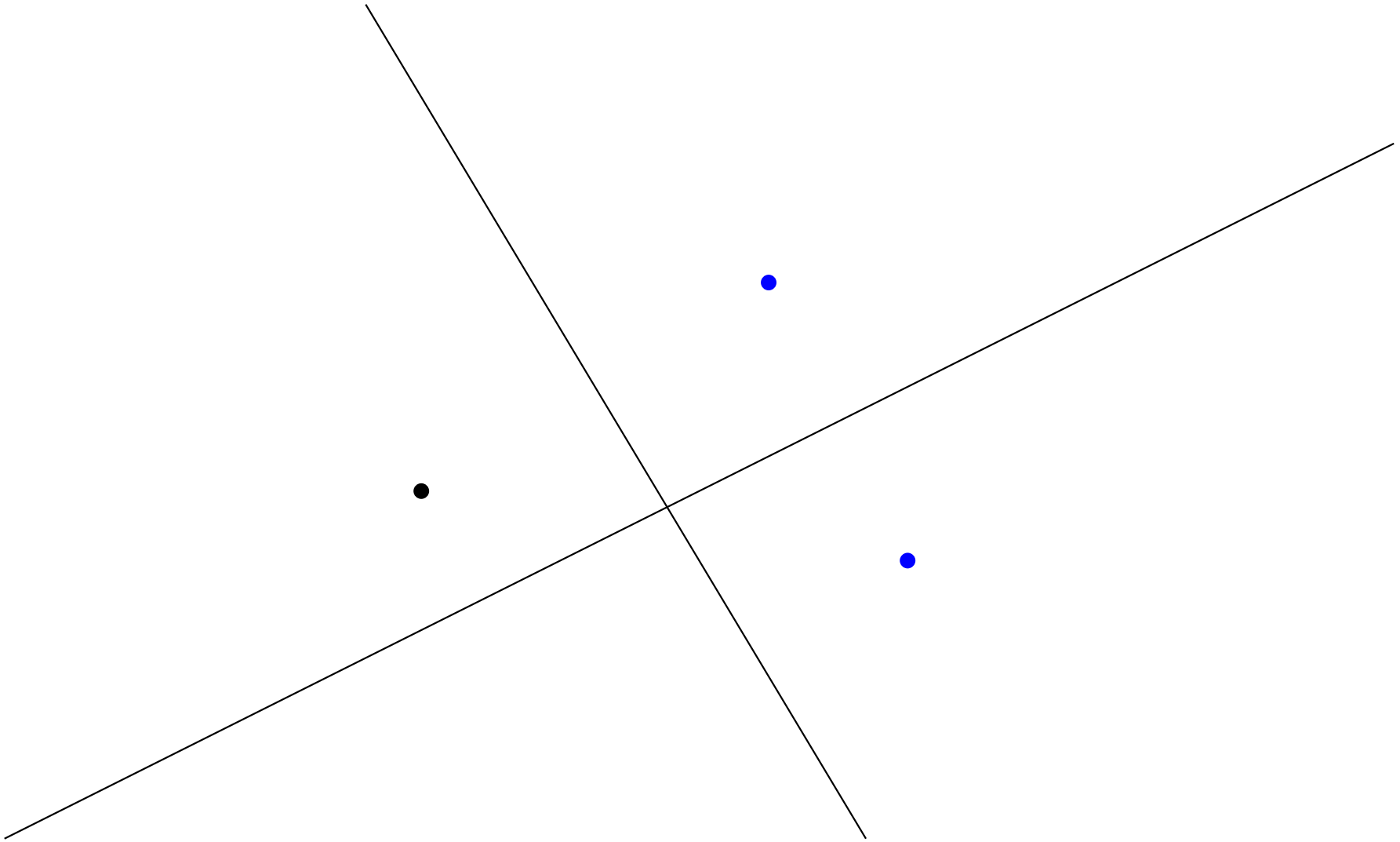
練習：Voronoi 図を描いてみる



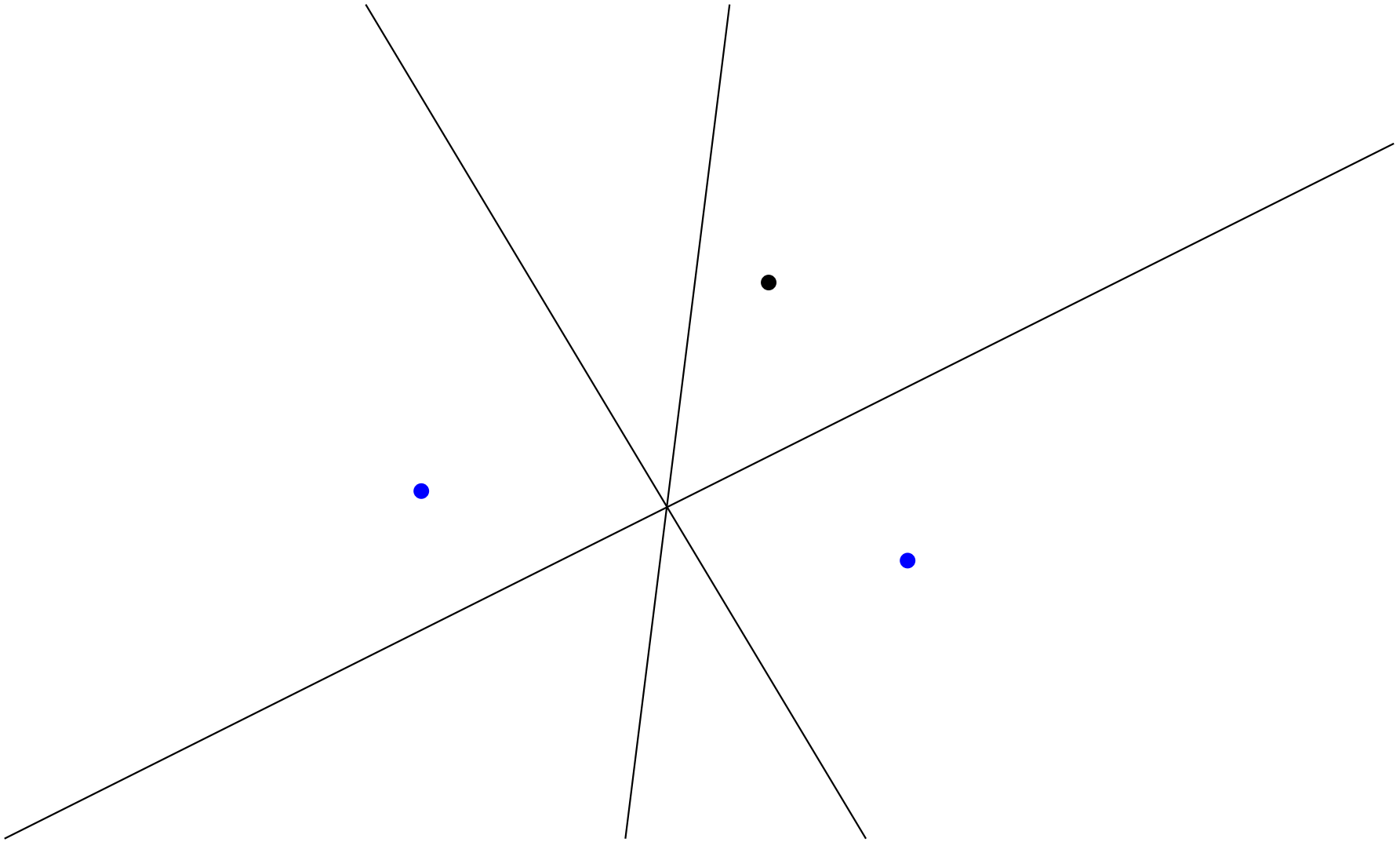
練習：Voronoi 図を描いてみる



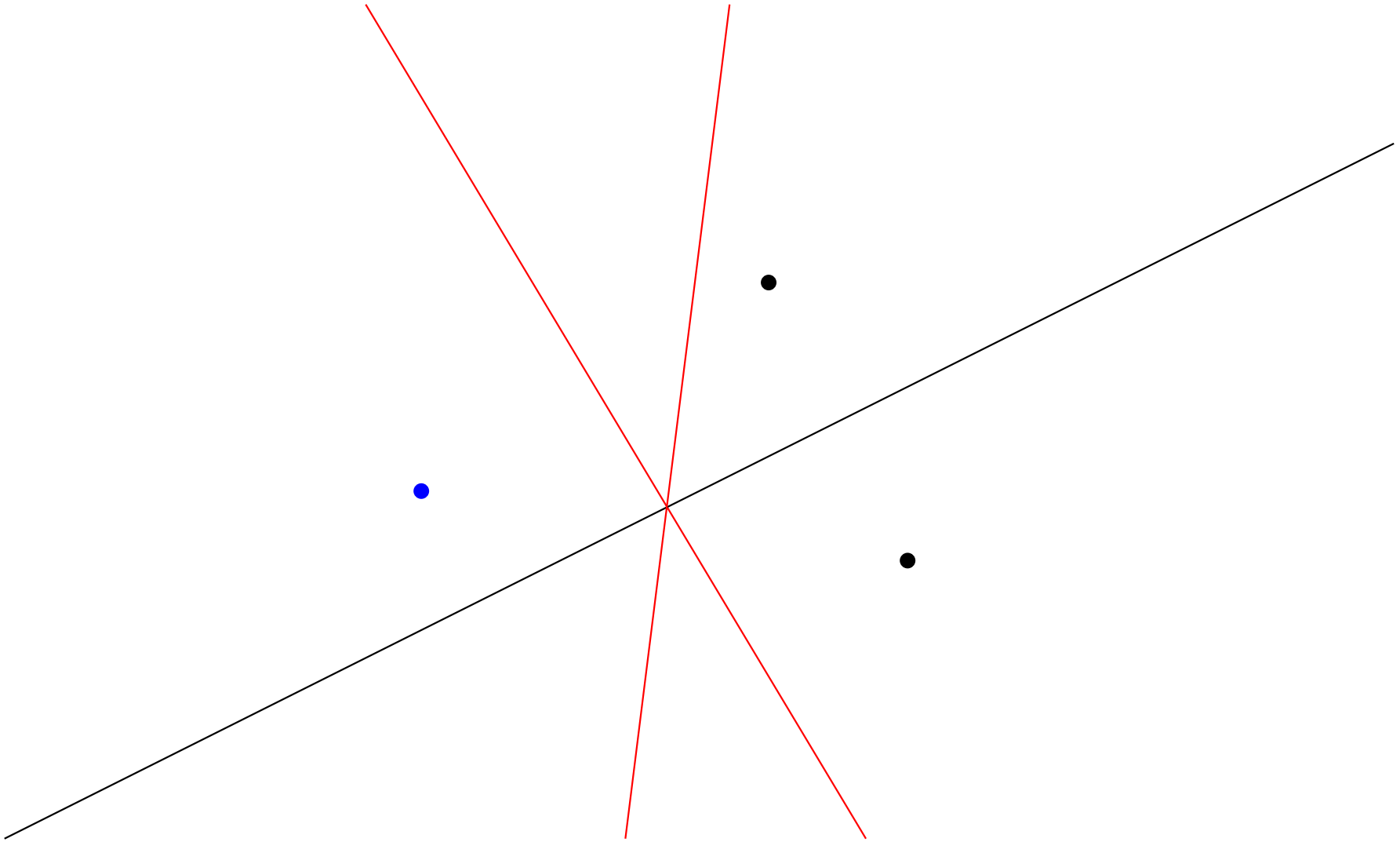
練習：Voronoi 図を描いてみる



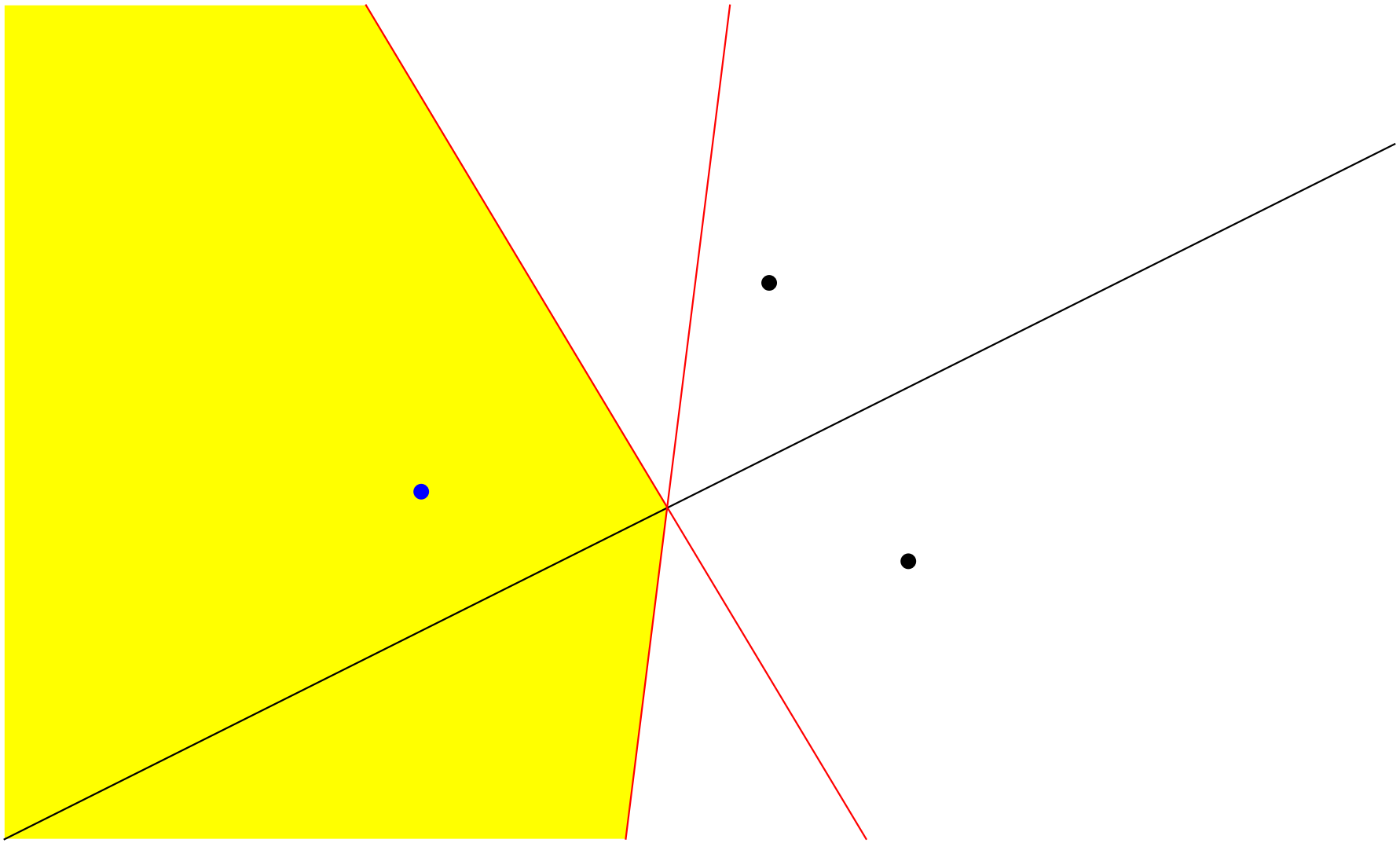
練習：Voronoi 図を描いてみる



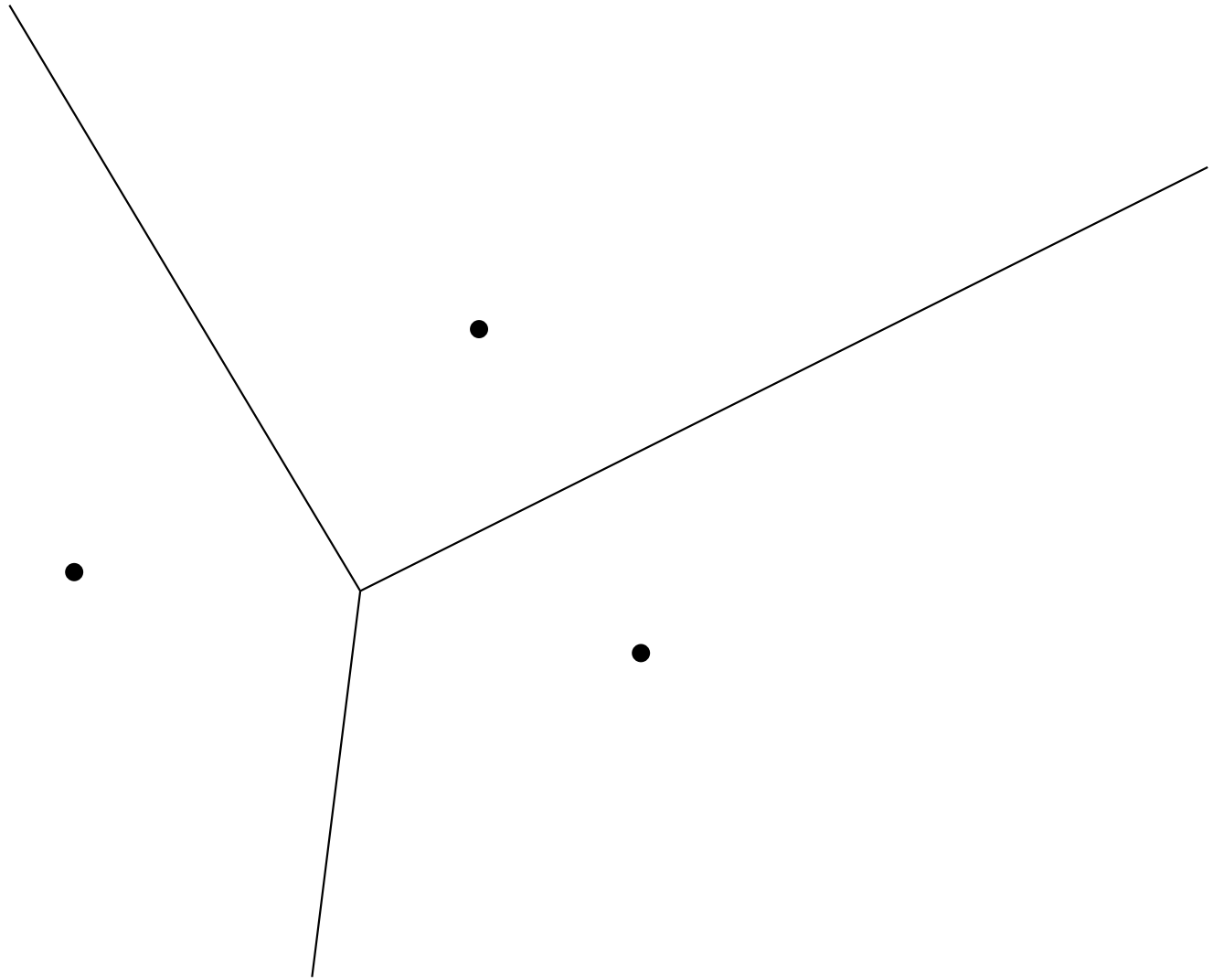
練習：Voronoi 図を描いてみる



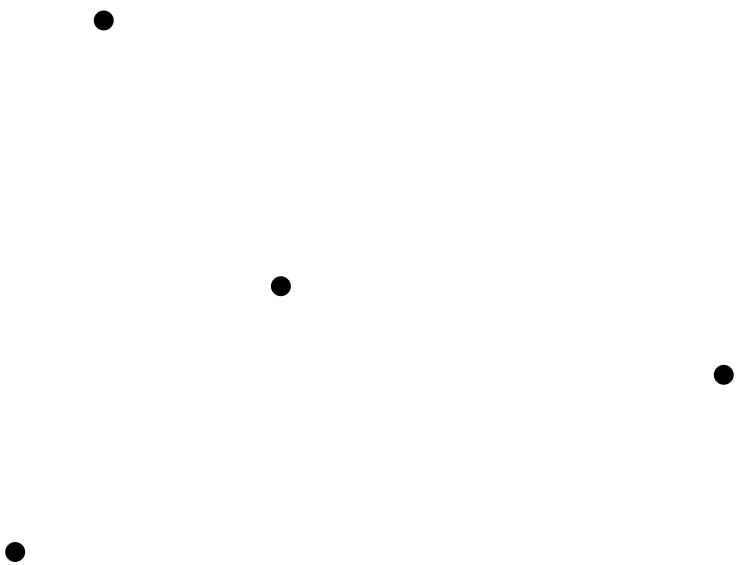
練習：Voronoi 図を描いてみる



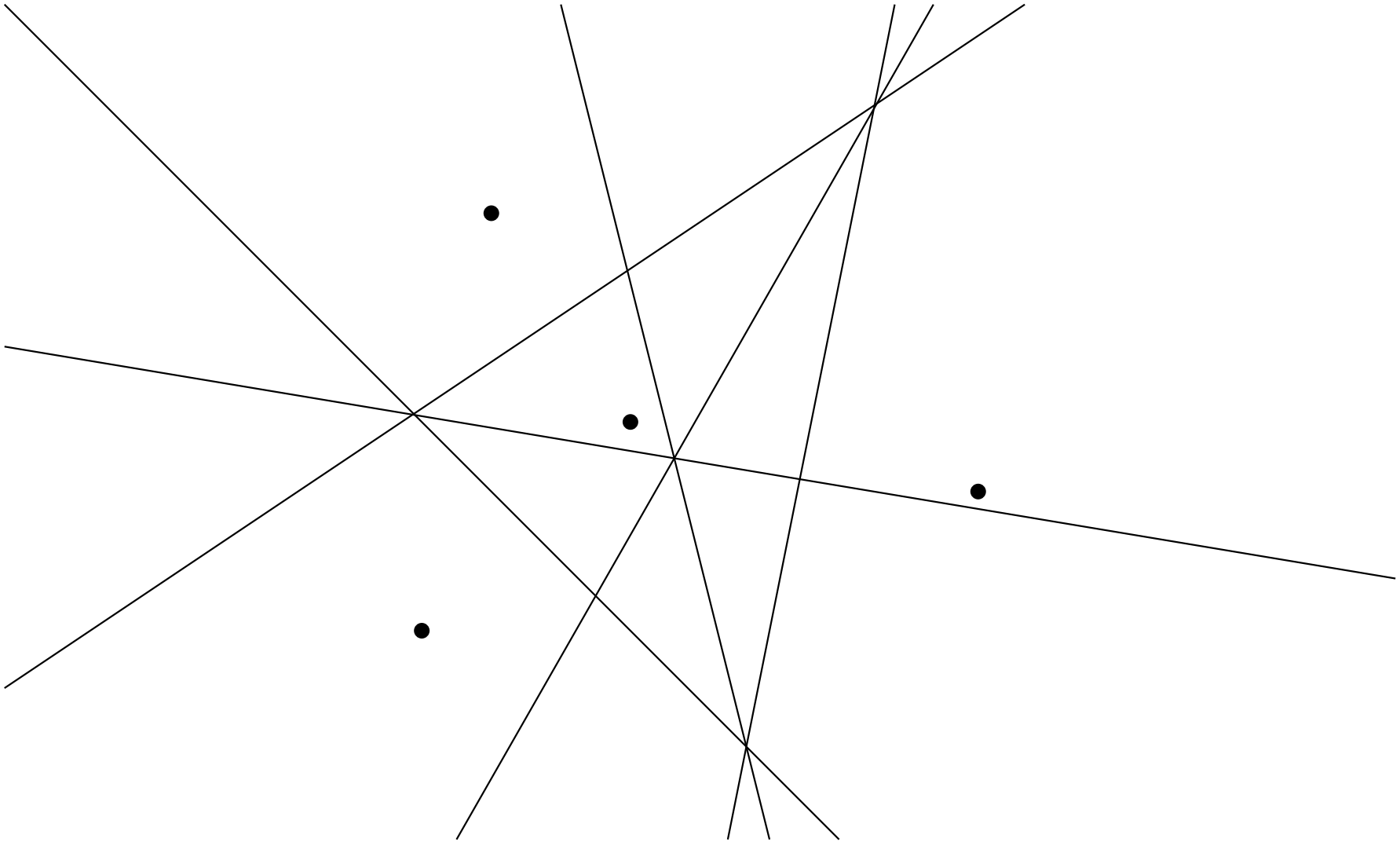
練習：Voronoi 図を描いてみる



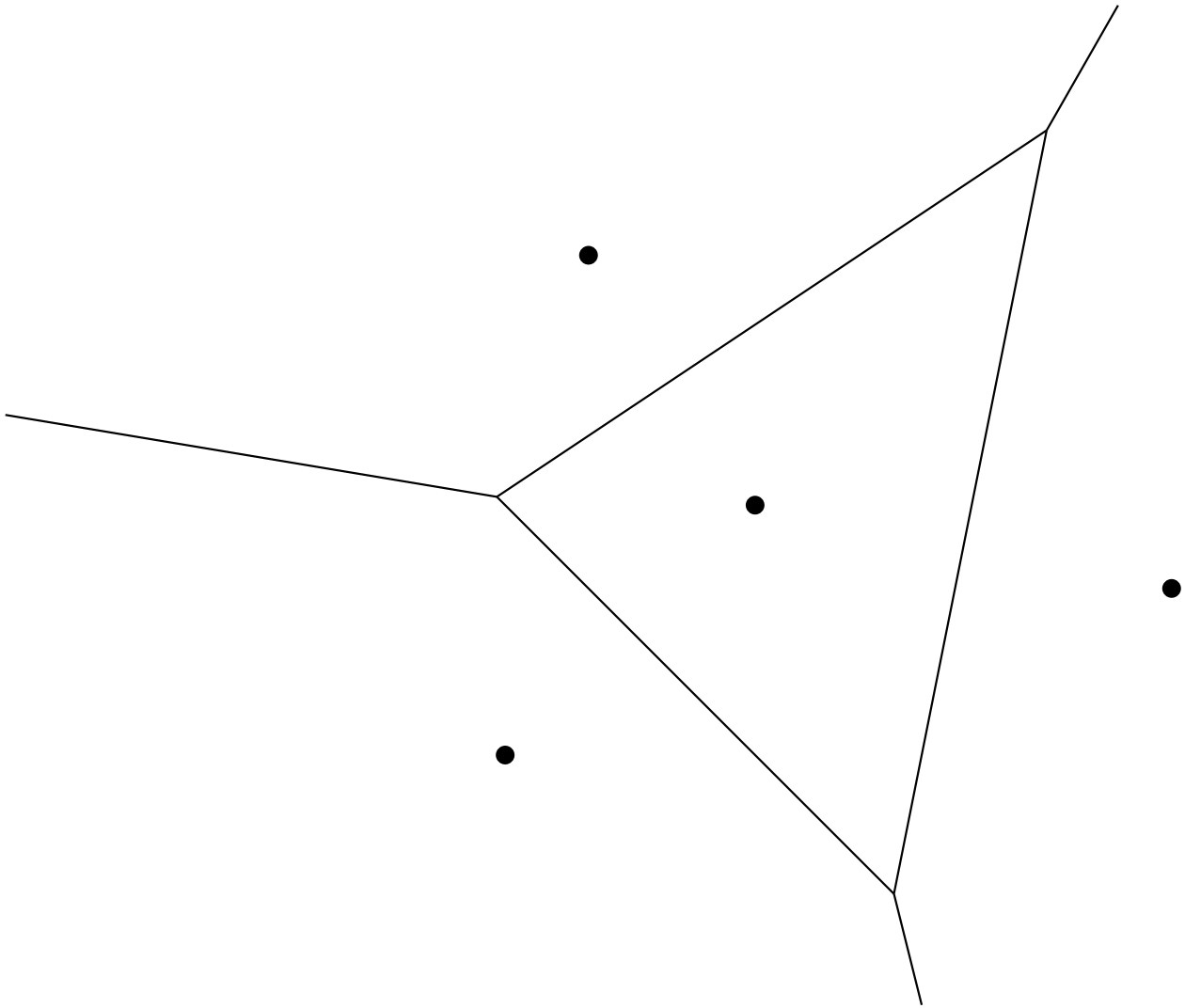
練習：Voronoi 図を描いてみる



練習：Voronoi 図を描いてみる

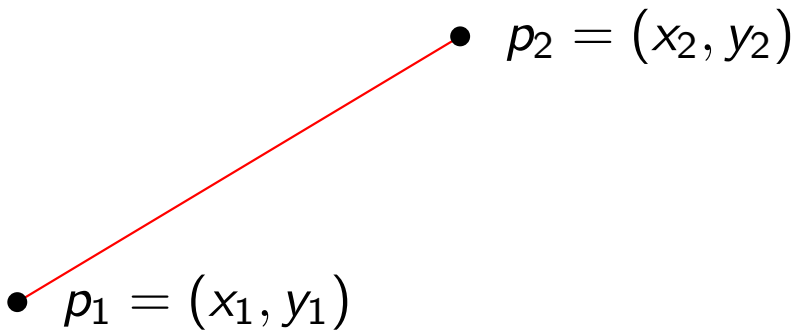


練習：Voronoi 図を描いてみる



目次

ユークリッド距離の計算

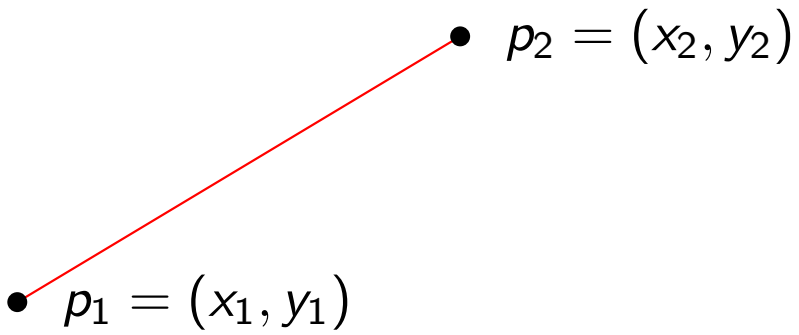


$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(よく「ユークリッド距離」と呼ばれる)

- 計算は簡単 $\rightsquigarrow$ $\therefore$ 応用も膨らむ

ユークリッド距離の計算



$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

(よく「ユークリッド距離」と呼ばれる)

- 計算は簡単 $\rightsquigarrow$ ∴ 応用も膨らむ

計算から見た価値観

簡単に計算できるような距離はよい距離

$\rightsquigarrow$ 距離の計算は簡単にできるのか？

文字列間の Levenshtein 距離 — バイオインフォマティクスでよく使われる

編集に基づく距離

k i t t e n
s i t t e n　replace
s i t t i n　replace
s i t t i n g　insert

編集操作：

- 置換
- 挿入
- 削除

Levenshtein 距離 = 一方から他方を得るための編集回数の最小値

計算に向けて：漸化式を書いてみる (1)

2 つの文字列 S, T の間の Levenshtein 距離は？

Case 1：S が空の場合

距離 $=$ T の文字数

Case 1'：T が空の場合

距離 $=$ S の文字数

例

- S：
- T：kitten

S に k, i, t, t, e, n を挿入 $\rightsquigarrow$ 6 回の操作が必要十分

計算に向けて：漸化式を書いてみる (2)

2 つの文字列 S, T の間の Levenshtein 距離は？

Case 2：S と T が空でない場合

次の 4 つの場合を考えないといけない

- S の最後の文字が T の最後の文字と同じ場合の置換
- S の最後の文字が T の最後の文字が違う場合の置換
- S の最後の文字を削除して，T が得られる場合
- T の最後の文字を削除して，S が得られる場合

距離はこの 4 つの場合の最小値

計算に向けて：漸化式を書いてみる (2-1)

2 つの文字列 S, T の間の Levenshtein 距離は？

Case 2-1：S の最後の文字 $=$ T の最後の文字の場合の置換

距離 $=$ S の最後の文字を取り除いた文字列と
T の最後の文字を取り除いた文字列の間の距離

例

- S：kitten
- T：sittin

最後の n はそのまま $\rightsquigarrow$ kitte と sitti の距離を計算すれば十分

計算に向けて：漸化式を書いてみる (2-2)

2 つの文字列 S, T の間の Levenshtein 距離は？

Case 2-2：S の最後の文字 $\neq$ T の最後の文字の場合の置換

距離 $=$ S の最後の文字を取り除いた文字列と
T の最後の文字を取り除いた文字列の間の距離 $+1$

例

- S：kitten
- T：sittig

最後の n を g に置換
$\rightsquigarrow$ あとは，kitte と sitti の距離を計算すれば十分

計算に向けて：漸化式を書いてみる (2-3)

2 つの文字列 S, T の間の Levenshtein 距離は？

Case 2-3：S に対する削除で T が得られる

距離 $=$ S の最後の文字を取り除いた文字列と T の間の距離 $+1$

例

- S：kitten
- T：sittig

最後の n を削除
$\rightsquigarrow$ あとは，kitte と sittig の距離を計算すれば十分

計算に向けて：漸化式を書いてみる (2-4)

2 つの文字列 S, T の間の Levenshtein 距離は？

Case 2-4：T に対する削除で S が得られる

距離 $=$ T の最後の文字を取り除いた文字列と S の間の距離 $+1$

例

- S：kitten
- T：sittig

最後の g を削除
$\rightsquigarrow$ あとは，kitten と sitti の距離を計算すれば十分

Levenshtein 距離：漸化式のまとめ

文字列 S と T の Levenshtein 距離 $d(S, T)$ は次を満たす

S か T が空のとき

$$d(S, T) = \max\{|S|, |T|\}$$

S も T も空ではないとき

S と T の最後の文字が同じ場合

$$d(S, T) = \min\{d(S', T') \quad , d(S, T') + 1, d(S', T) + 1\}$$

S と T の最後の文字が異なる場合

$$d(S, T) = \min\{d(S', T') + 1, d(S, T') + 1, d(S', T) + 1\}$$

- $|S| = S$ の文字数，$|T| = T$ の文字数
- $S' = S$ の最後の文字を取り除いた文字列
- $T' = T$ の最後の文字を取り除いた文字列

漸化式を利用した計算

$$
\begin{aligned}
d(\text{kitten}, \text{sitting}) \quad = \quad & \min\{d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 1, \\
& \quad d(\text{kitten}, \text{sittin}) + 1, \\
& \quad d(\text{kitte}, \text{sitting}) + 1\}
\end{aligned}
$$

漸化式を利用した計算

$$
\begin{aligned}
d(\text{kitten}, \text{sitting}) &= \min\{d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 1, \\
&\qquad d(\text{kitten}, \text{sittin}) + 1, \\
&\qquad d(\text{kitte}, \text{sitting}) + 1\} \\
&= \min\{\min\{d(\text{kitt}, \text{sitti}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitte}, \text{sitti}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitt}, \text{sittin}) + 2\}, \\
&\qquad \min\{d(\text{kitte}, \text{sitti}) + 1, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitten}, \text{sitti}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 2\}, \\
&\qquad \min\{d(\text{kitt}, \text{sittin}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitt}, \text{sitting}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 2\}\}
\end{aligned}
$$

漸化式を利用した計算

$$
\begin{aligned}
d(\text{kitten}, \text{sitting}) &= \min\{d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 1, \\
&\qquad d(\text{kitten}, \text{sittin}) + 1, \\
&\qquad d(\text{kitte}, \text{sitting}) + 1\} \\
&= \min\{\min\{d(\text{kitt}, \text{sitti}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitte}, \text{sitti}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitt}, \text{sittin}) + 2\}, \\
&\qquad \min\{d(\text{kitte}, \text{sitti}) + 1, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitten}, \text{sitti}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 2\}, \\
&\qquad \min\{d(\text{kitt}, \text{sittin}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitt}, \text{sitting}) + 2, \\
&\qquad\qquad d(\text{kitte}, \text{sittin}) + 2\}\} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

- 式がどんどん膨れ上がっていく
  $\rightsquigarrow$ 計算量の爆発
- 同じ計算が何度も現れる

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
s							
i							
t							
t							
i							
n							
g							

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s							
i							
t							
t							
i							
n							
g							

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1						
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1					
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2				
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2	3			
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2	3	4		
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2	3	4	5	
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2	3	4	5	6
i	2						
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2	3	4	5	6
i	2	2	1	2	3	4	5
t	3						
t	4						
i	5						
n	6						
g	7						

Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

表を利用した再計算の抑制 — 動的計画法と呼ばれる手法

		k	i	t	t	e	n
	0	1	2	3	4	5	6
s	1	1	2	3	4	5	6
i	2	2	1	2	3	4	5
t	3	3	2	1	2	3	4
t	4	4	3	2	1	2	3
i	5	5	4	3	2	2	3
n	6	6	5	4	3	3	2
g	7	7	6	5	4	4	3

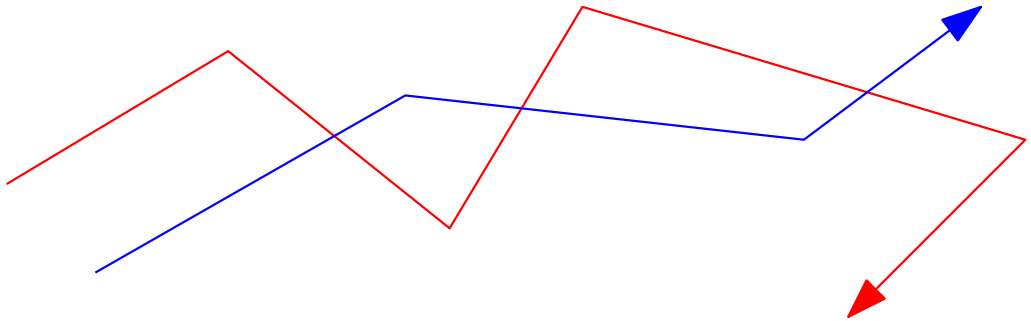
Levenstein 距離の計算は $O(mn)$ 時間でできる

($m = S$ の文字数，$n = T$ の文字数)

目次

曲線間の Frechét 距離

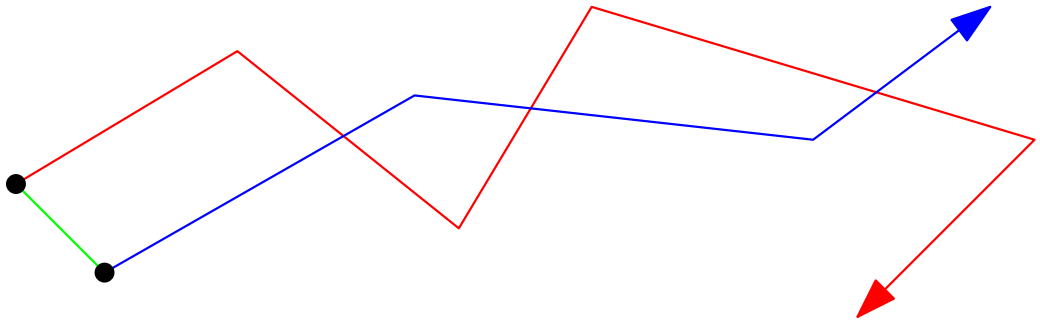
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

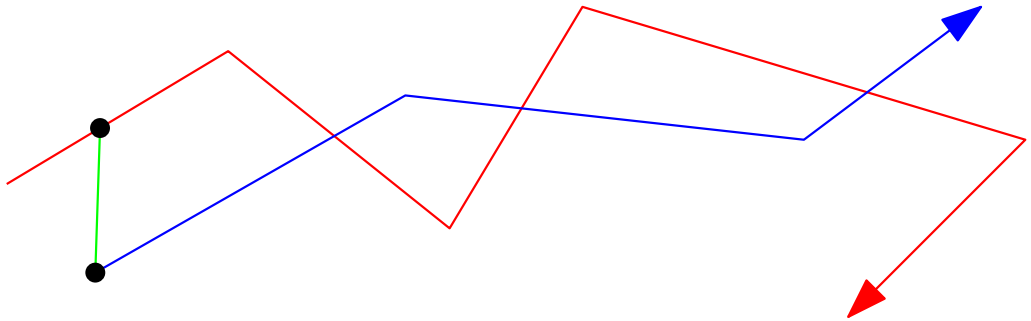
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

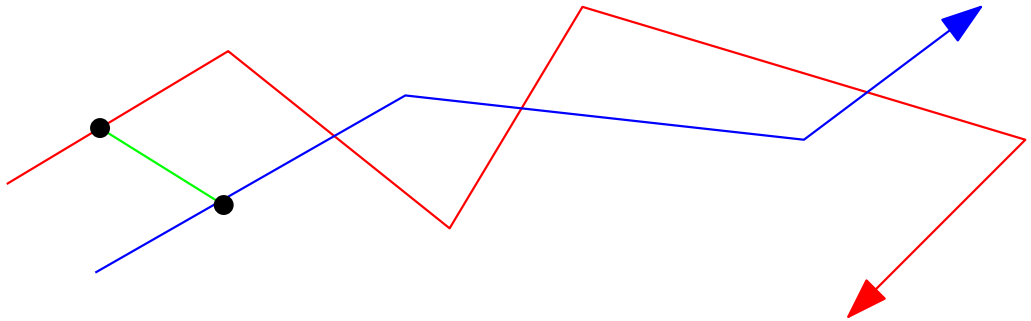
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

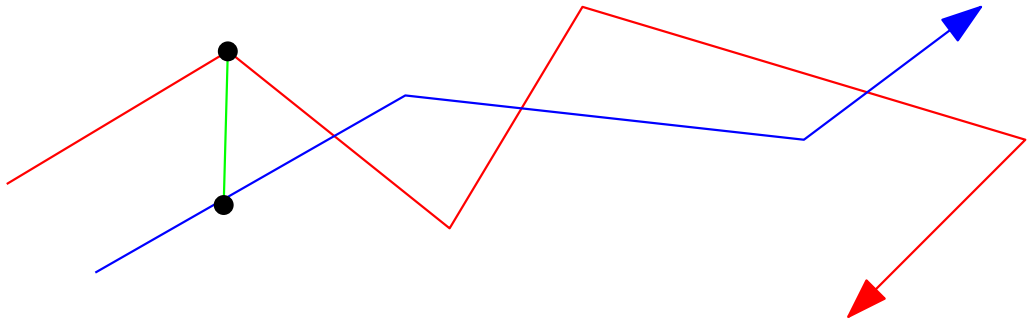
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

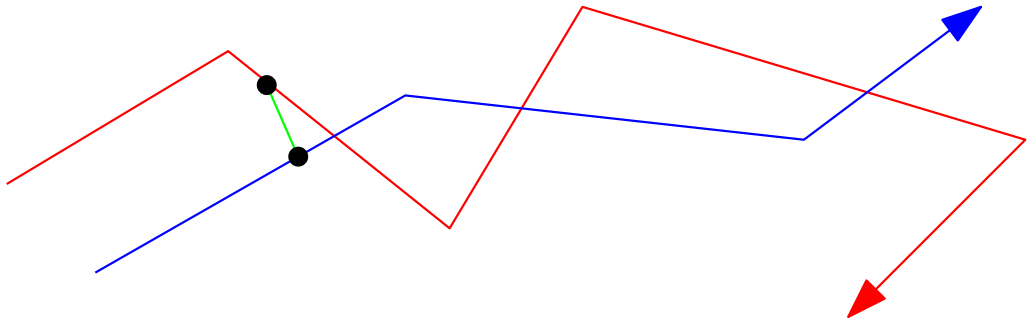
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

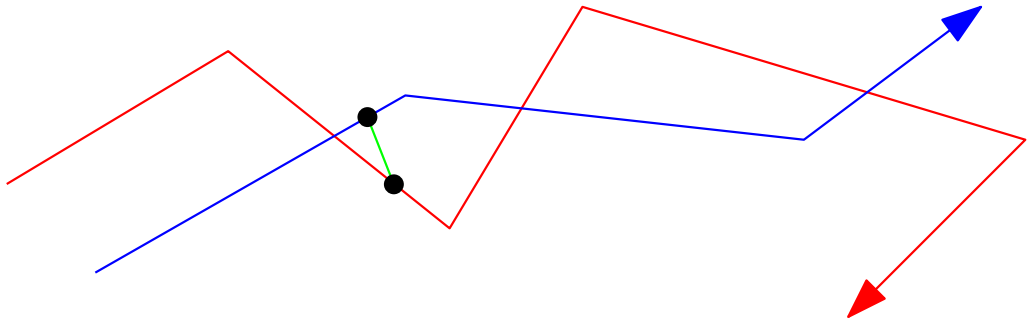
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

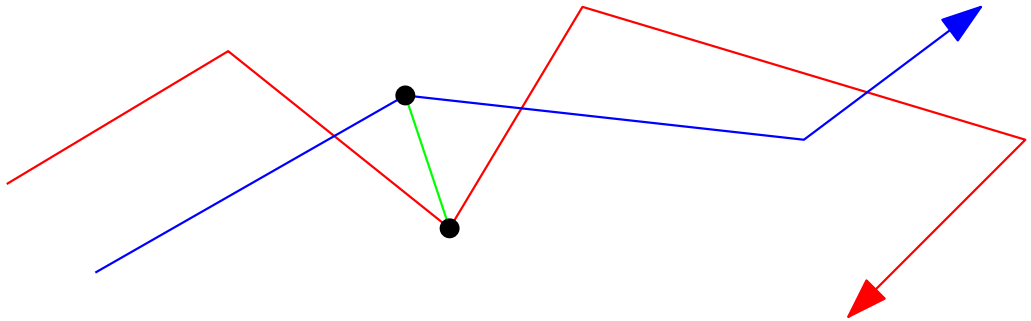
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

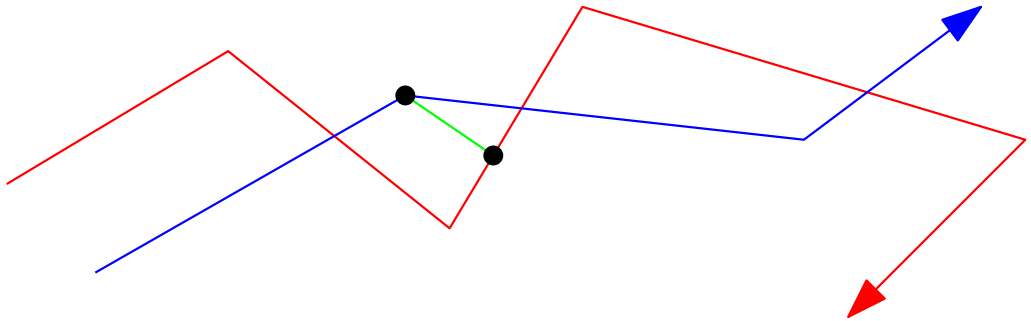
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

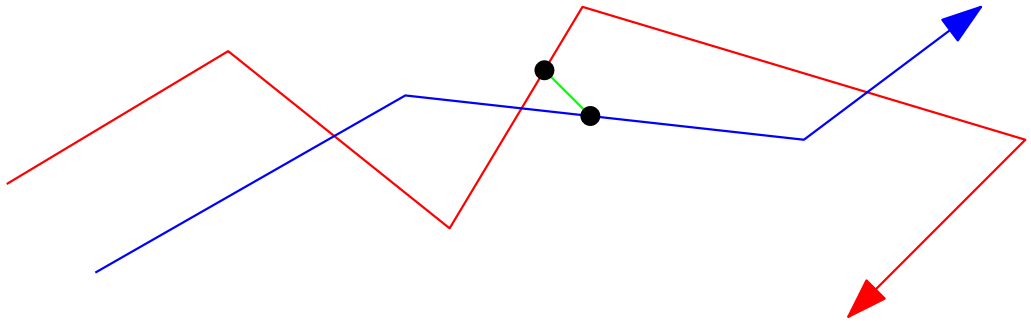
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

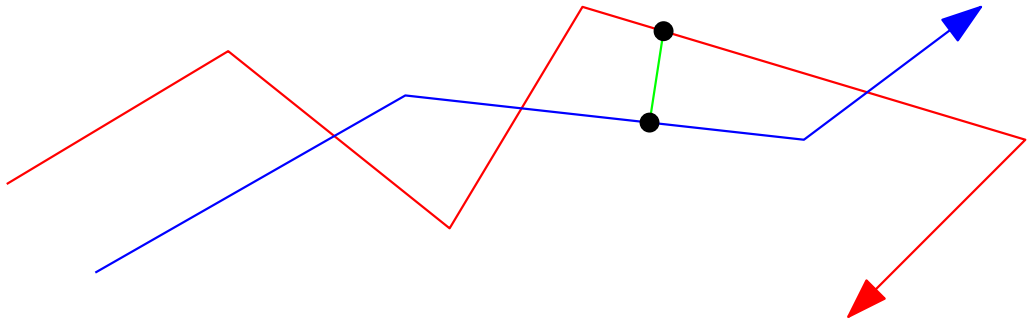
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

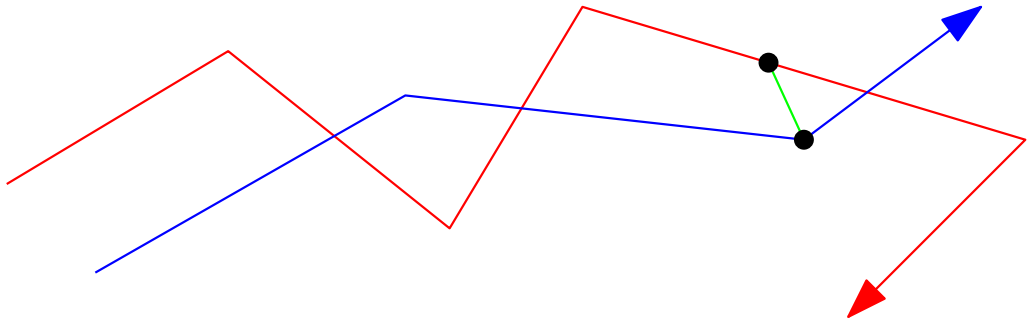
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離

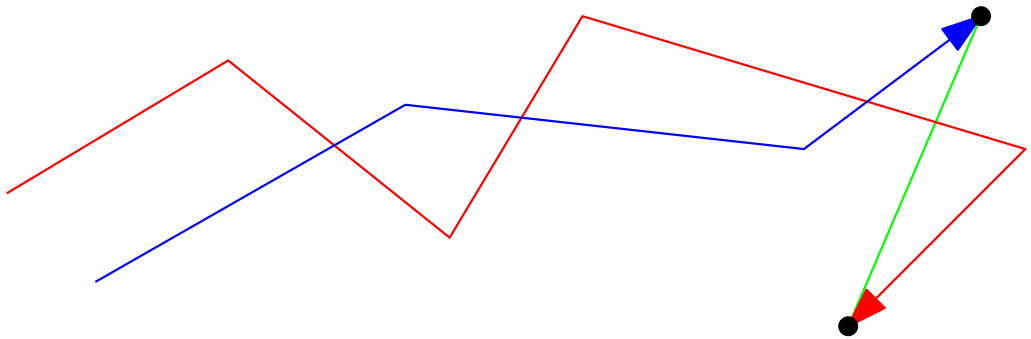
曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

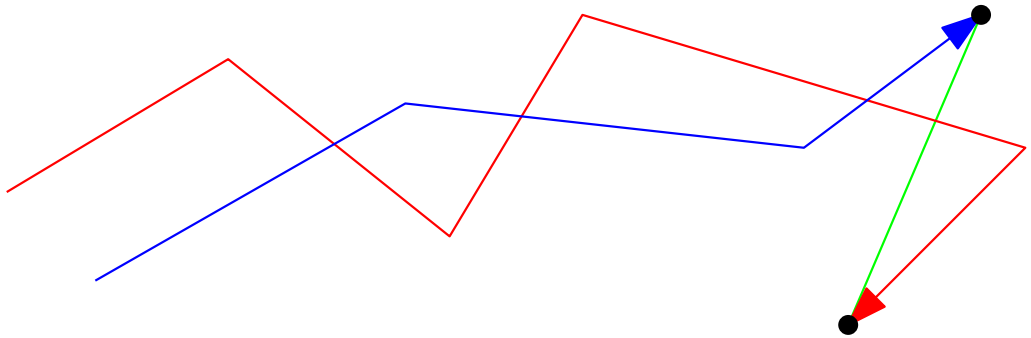
曲線間の Frechét 距離

曲線上を単調に (逆戻りせずに) 歩く



Frechét 距離 = すべての歩き方における
道中における 2 点の最大ユークリッド距離の最小値

曲線間の Frechét 距離の計算法

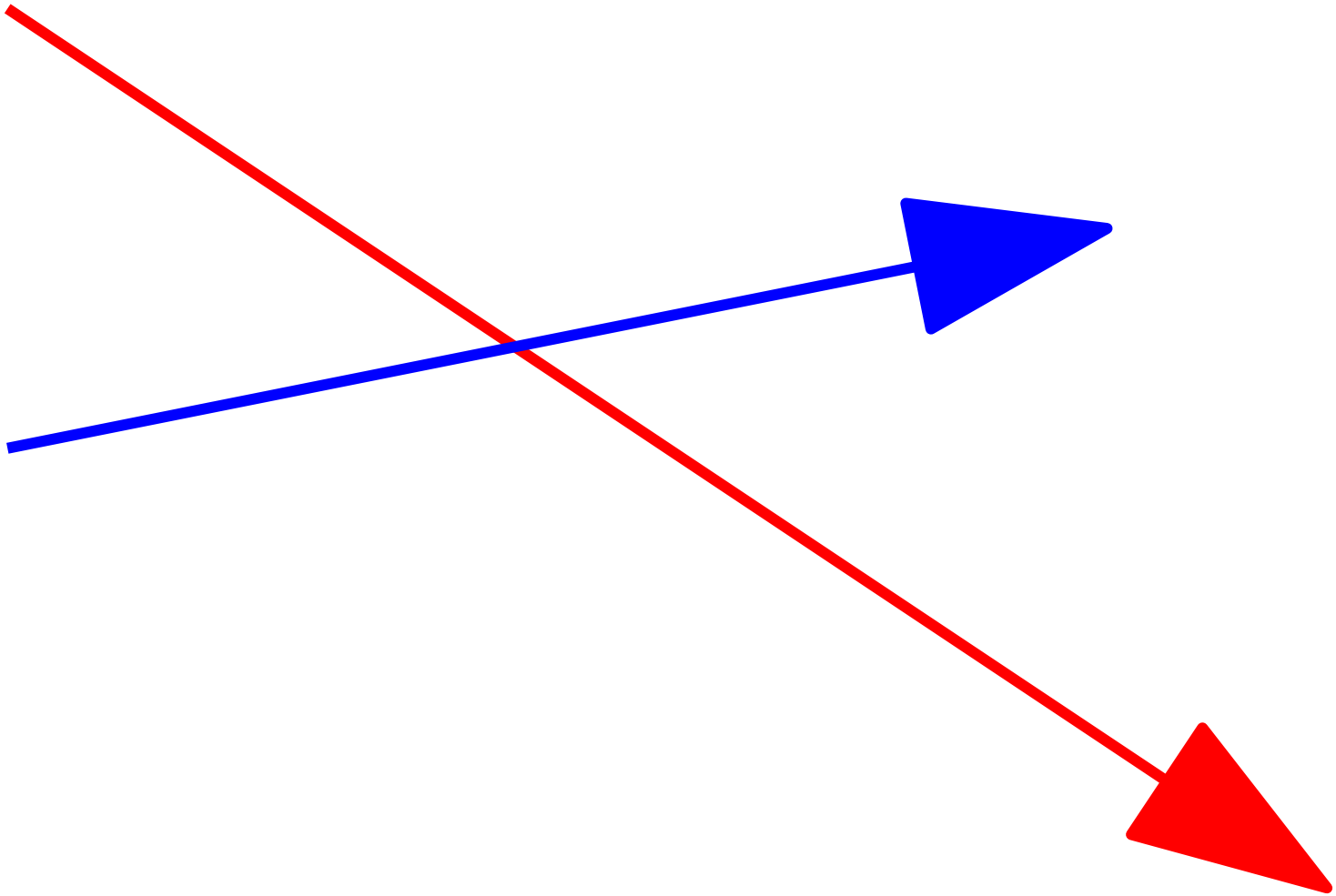


Frechét 距離をどのように計算すればよいのか？

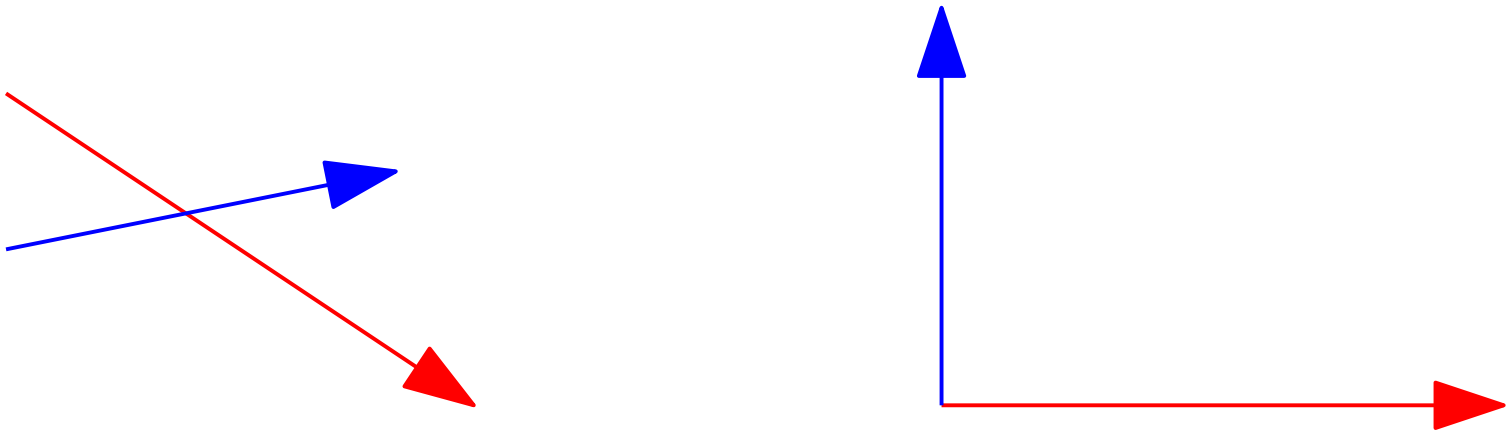
「歩き方」が無限にあるので,「すべての場合を尽くす」ことが不可

まずは,「Frechét 距離がある値 ε 以下か？」という質問に
正しく答えられるようにする

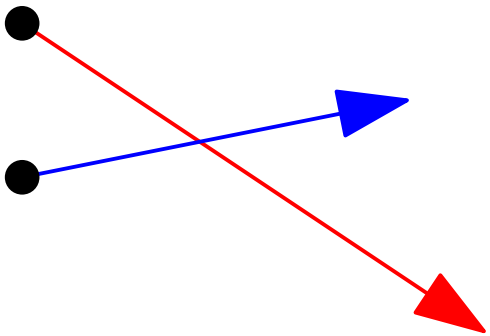
Free space diagram：簡単な例

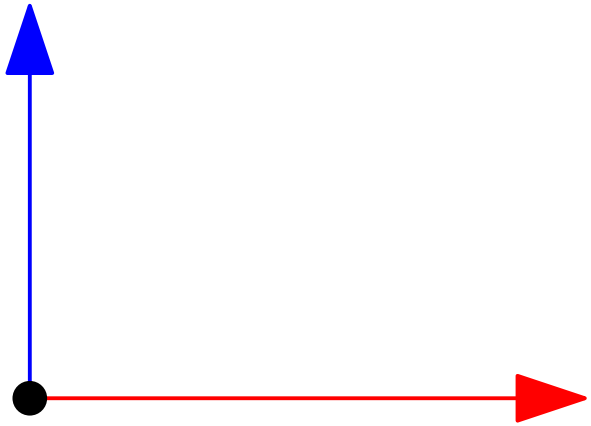


Free space diagram：簡単な例

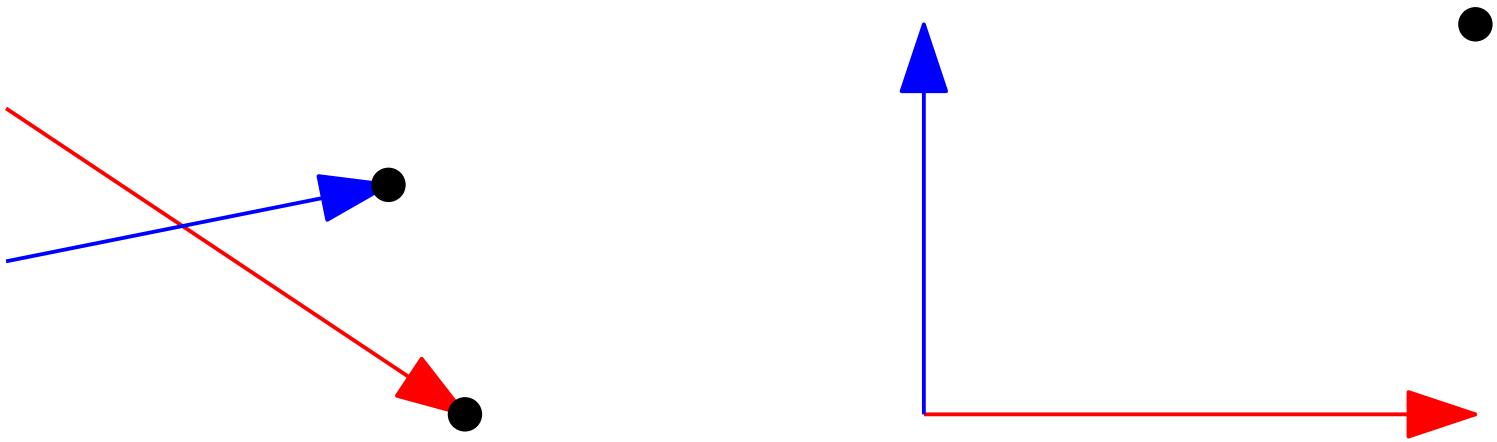


Free space diagram：簡単な例

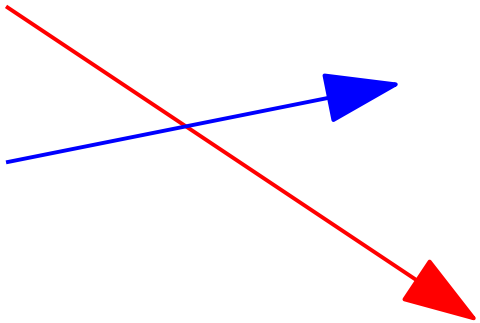


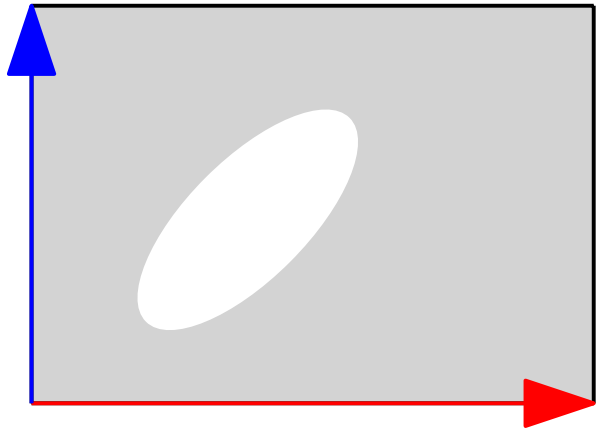


Free space diagram：簡単な例

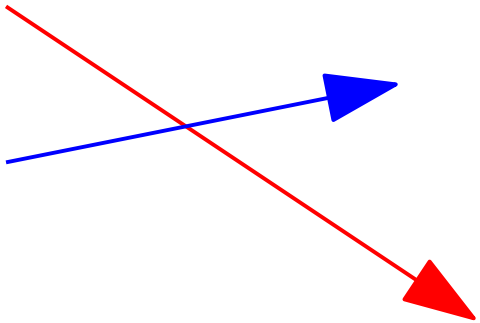


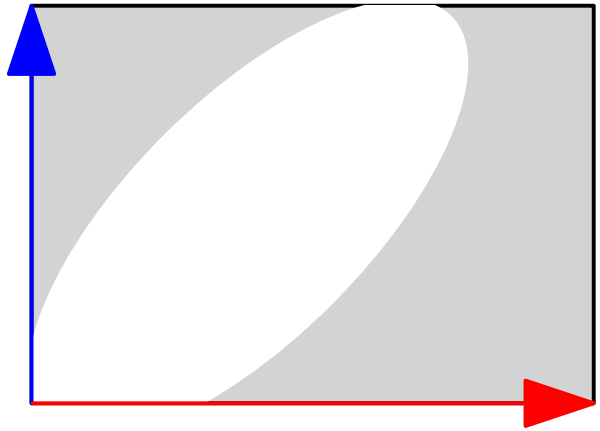
Free space diagram：簡単な例



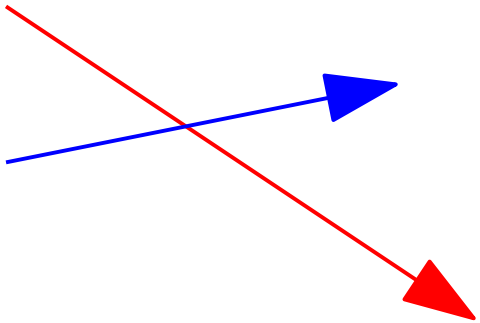


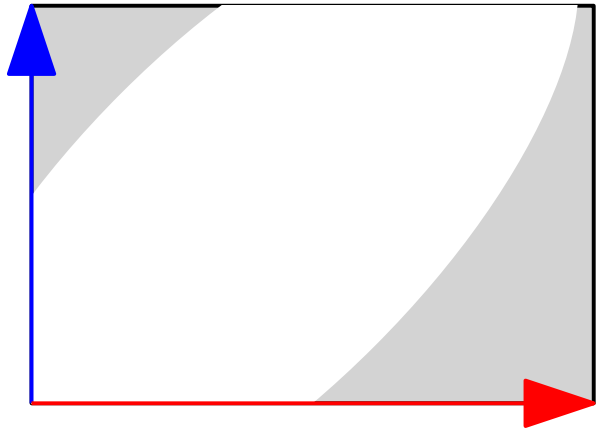
Free space diagram：簡単な例



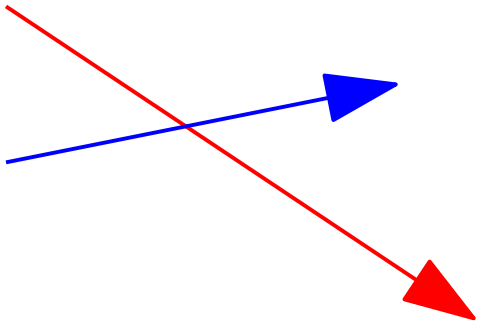


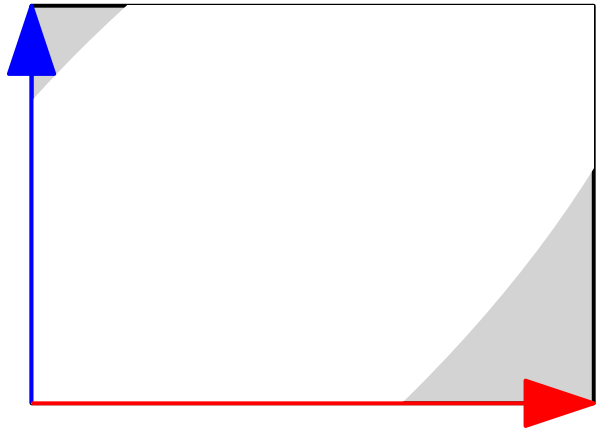
Free space diagram：簡単な例



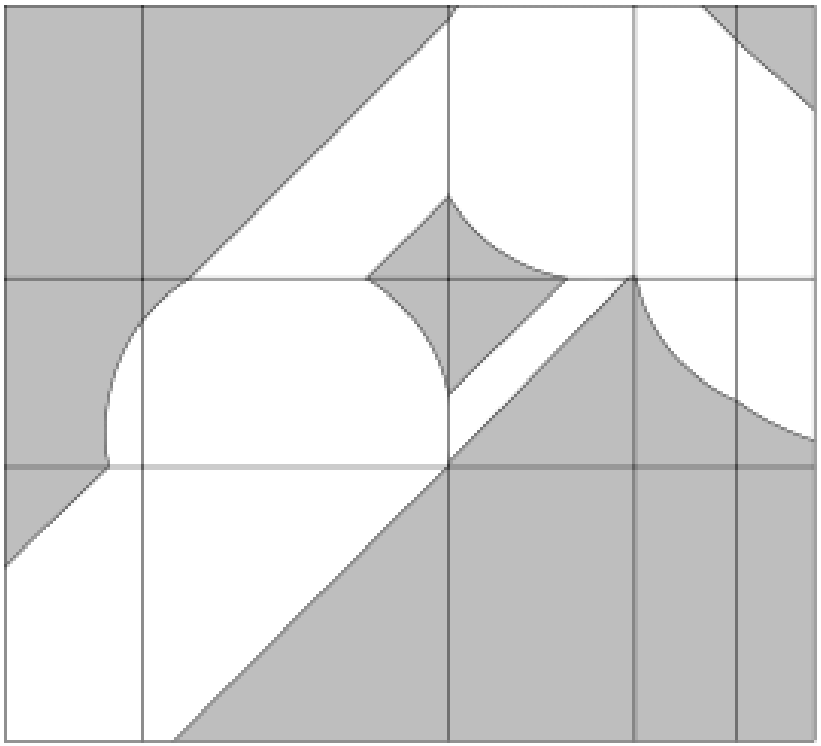


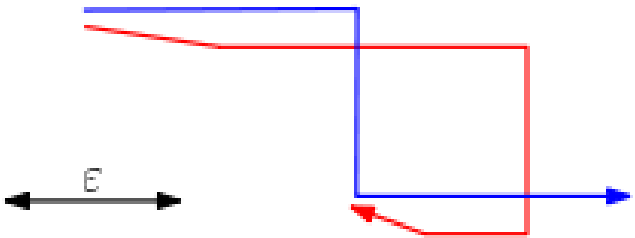
Free space diagram：簡単な例





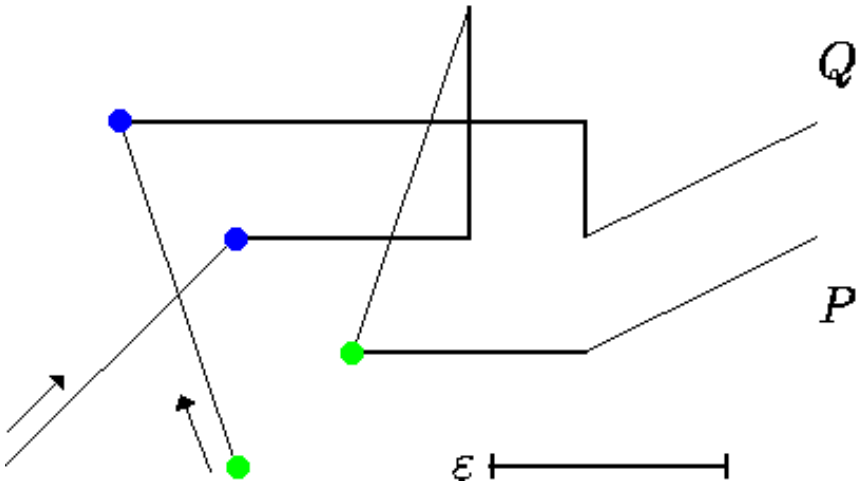
Free space diagram：全体像

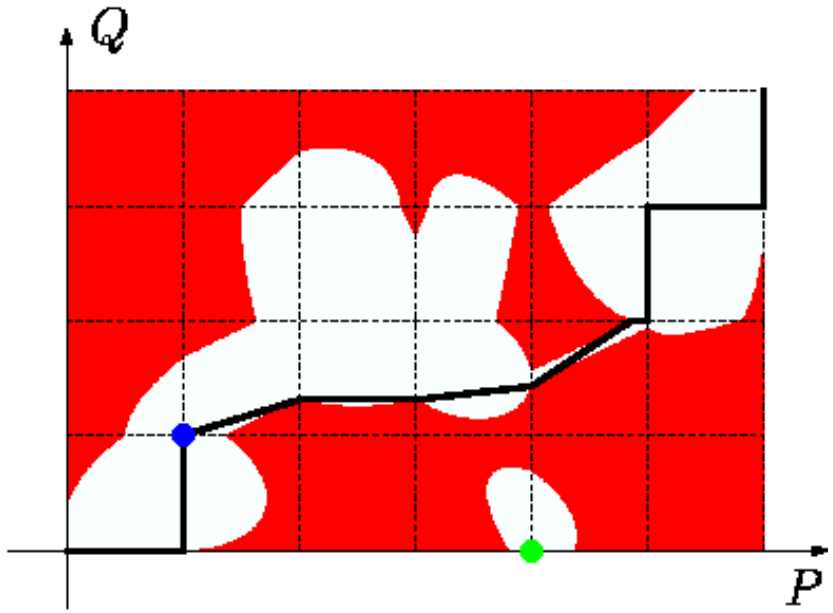




http://en.wikipedia.org/wiki/Fréchet_distance

Free space diagram：全体像





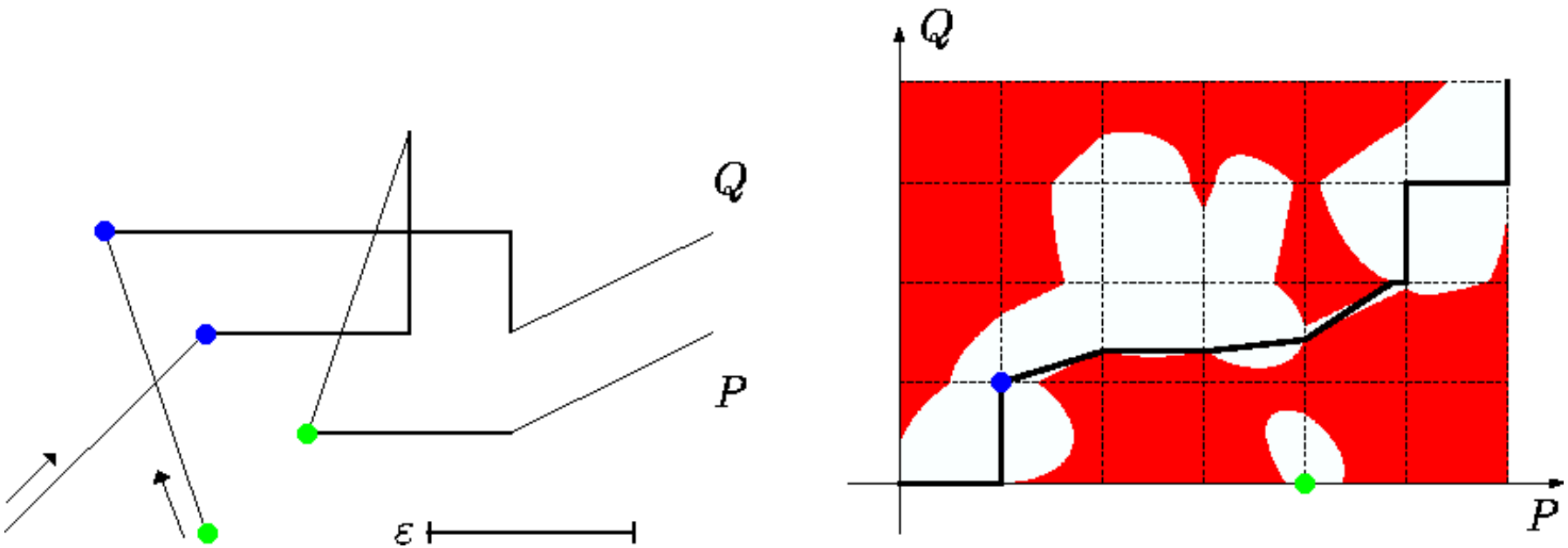
http://www.cim.mcgill.ca/~stephane/cs507/Project.html

単調な経路が存在するかどうかは，動的計画法で確認できる

Alt & Godau ('95)

2 曲線間の Frechét 距離が ε 以下であるかどうかの判定は
$O(n^2)$ 時間でできる　　($n = 2$ つの曲線を構成する線分の数)

Free space diagram：全体像



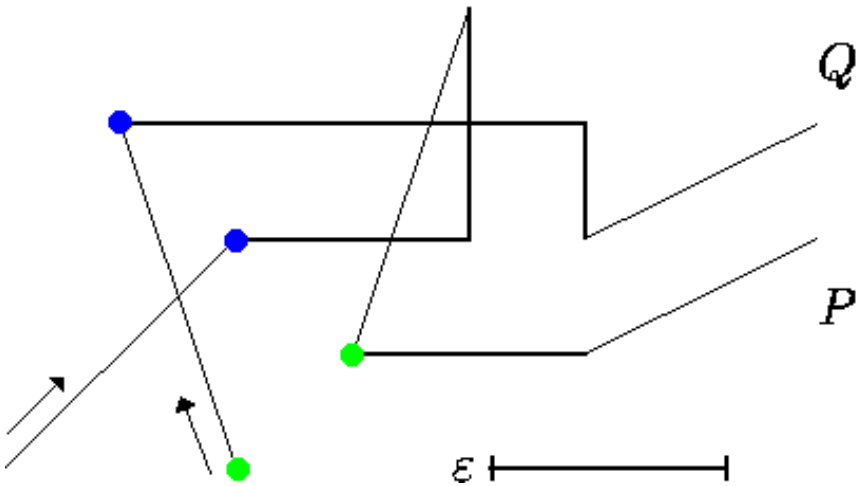
http://www.cim.mcgill.ca/~stephane/cs507/Project.html

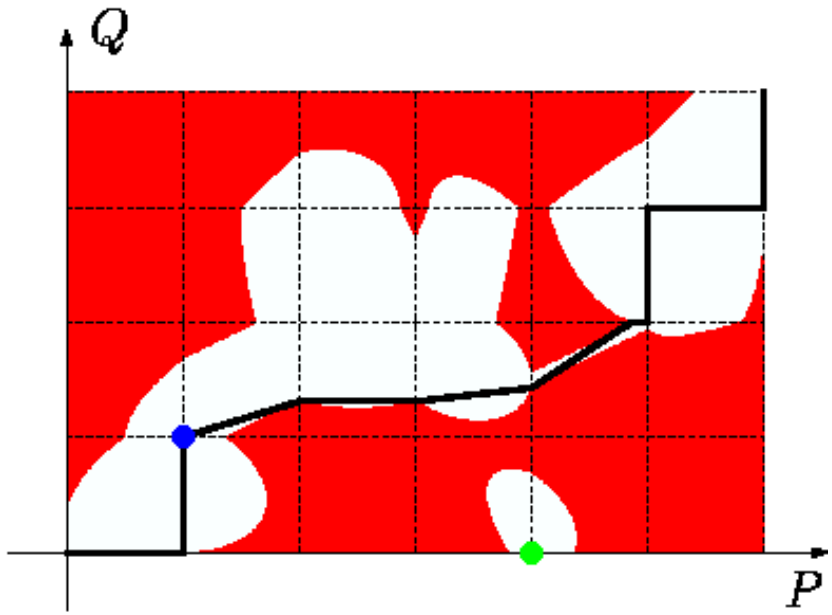
前頁の判定アルゴリズムに parametric search を組み合わせて次を得る

Alt & Godau ('95)

2 曲線間の Frechét 距離の計算は $O(n^2 \log n)$ 時間でできる
($n = 2$ つの曲線を構成する線分の数)

Free space diagram：全体像 — 最近の結果





http://www.cim.mcgill.ca/~stephane/cs507/Project.html

Buchin, Buchin, Meulemans, Mulzer ('14)

2 曲線間の Frechét 距離の計算は $O(n^2 \log^2 \log n / \log n)$ 時間でできる
($n = 2$ つの曲線を構成する線分の数)

この 2 コマの目標

「距離」にまつわる話

- 距離とは何か？ (定義)
- 距離をどう使うのか？ (応用)
- 距離をどう計算するのか？ (計算)