離散最適化基礎論 第 12 回
マトロイドの合併

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 1 月 29 日

最終更新：2016 年 8 月 23 日　11:58

スケジュール 前半

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 ~~最近のトピック~~ マトロイドの合併 (1/29)
- ⋆ ~~授業等調整日 (予備日)~~ (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12)

注意：予定の変更もありうる

期末試験

- 日時：2 月 12 日 (金) 4 限
- 教室：西 5 号館 214 教室
- 範囲：第 1 回講義のはじめ から 第 10 回講義のおわり まで
  (第 11 回と第 12 回は含まない)
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題以上は演習問題として提示されたものと同一である
    (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

目次

マトロイドの直和・合併

非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併 (union) とは？　(復習)

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の合併とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset\}$$

非空な有限集合 E_1, E_2，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和 (direct sum) とは？　(復習)

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の直和とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

合併と直和は似ているが，少し違う

マトロイドの合併・直和はマトロイド

非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ は E 上のマトロイド

非空な有限集合 E_1, E_2，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

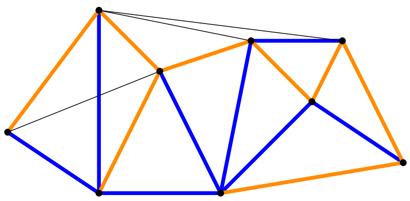
マトロイドの直和はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の直和は $E_1 \cup E_2$ 上のマトロイド

応用：辺素な全域木

辺素な２つの全域木を見つける問題は

閉路マトロイドと閉路マトロイドの合併でモデル化できる



辺素：辺集合が互いに素

応用：辺素な全域木 (続き)

辺素な２つの全域木を見つける問題は

閉路マトロイドと閉路マトロイドの合併でモデル化できる

無向グラフ $G = (V, E)$ 上の閉路マトロイドを $\mathcal{I}$ として

次の問題を考える　　貪欲アルゴリズムで解ける ???

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \end{array}$$

観察

最適値 $= 2(|V| - 1)$ $\Leftrightarrow$ G が辺素な２つの全域木を持つ

辺素な全域木：貪欲アルゴリズム？

次の問題を考える　　貪欲アルゴリズムで解ける ???

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \end{array}$$

貪欲アルゴリズム

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. すべての $i \leftarrow 1, 2, \dots, n$ に対して，以下を繰り返し
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \end{cases}$$
3. X を出力

辺素な全域木：貪欲アルゴリズム？ (2)

貪欲アルゴリズム

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. すべての $i \leftarrow 1, 2, \dots, n$ に対して，以下を繰り返し
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \end{cases}$$
3. X を出力

問題点

「$X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I}$」の条件判定をどのように行うのか？

自明ではない $\rightsquigarrow$ 実は,「マトロイドの交わり」を使うと効率よく行える

目次

マトロイドの合併とマトロイドの交わり (1)

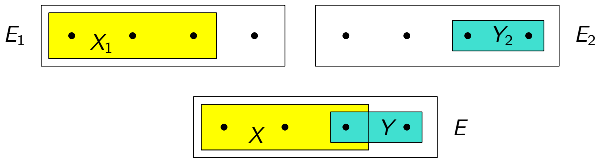
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

考えること

合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ をマトロイドの交わりとして表現すること

そのために考える設定

- $E_1 = \{(e,1) \mid e \in E\}$, $E_2 = \{(e,2) \mid e \in E\}$,
  $\mathcal{I}'_1 = \{X' \mid$ ある $X \in \mathcal{I}_1$ に対して， $X' = \{(e,1) \mid e \in X\}\}$,
  $\mathcal{I}'_2 = \{X' \mid$ ある $X \in \mathcal{I}_2$ に対して， $X' = \{(e,2) \mid e \in X\}\}$
- $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ であり，$\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2$ はそれぞれ E_1, E_2 上のマトロイド
- $\mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2$ は $E_1 \cup E_2$ 上のマトロイド←1 つ目のマトロイド



マトロイドの合併とマトロイドの交わり (2)

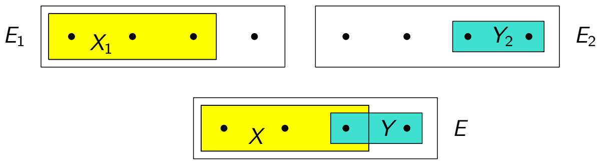
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

考えること

合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ をマトロイドの交わりとして表現すること

$E_1 \cup E_2$ 上の分割マトロイドで，次のものを考える ←2 つ目のマトロイド

$$\mathcal{J} = \{X' \mid \{(e,1),(e,2)\} \not\subseteq X' \text{ for all } e \in E\}$$

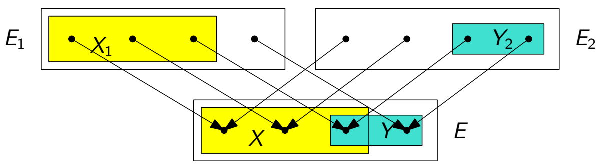


マトロイドの合併とマトロイドの交わり (3)

- 写像 $f\colon E_1 \cup E_2 \to E$ を次のように定義

$$\text{任意の } (e,1) \in E_1 \text{ に対して，} \quad f((e,1)) = e,$$
$$\text{任意の } (e,2) \in E_2 \text{ に対して，} \quad f((e,2)) = e$$

- このとき，$\mathcal{I}_1 = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_1\}$, $\mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_2\}$



証明したいこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2) \cap \mathcal{J}\}$$

証明したいこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}\}$$

証明 (⊇)：$X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}$ として，$f(X')$ を考える

- $\boxed{\text{目標}}$：$f(X') \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ を導く
- $X' \in \mathcal{J}$ より，各 $e \in E$ に対して $\{(e,1),(e,2)\} \not\subseteq X'$
- つまり，

$$X_1' = \{(e,1) \mid (e,1) \in X'\}, \quad X_2' = \{(e,2) \mid (e,2) \in X'\}$$

  とすると

$$f(X') = f(X_1') \cup f(X_2') \quad \text{かつ} \quad f(X_1') \cap f(X_2') = \emptyset$$

- $f(X_1') \in \mathcal{I}_1, f(X_2') \in \mathcal{I}_2$ なので，$f(X') \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

証明したいこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}\}$$

証明 (⊆)：$X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ とする

- $\boxed{\text{目標}}$：ある $X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}$ に対して，$X = f(X')$
- $X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ より，ある $X_1 \in \mathcal{I}_1$ と $X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

- このとき，$X_1' = \{(e,1) \mid e \in X_1\}, X_2' = \{(e,2) \mid e \in X_2\}$ とすると，

$$X_1 = f(X_1'), \quad X_2 = f(X_2')$$

- さらに，$X_1' \cup X_2' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}$
- つまり，$X' = X_1' \cup X_2'$ とすれば，

$$X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}, \quad X = f(X') \qquad \square$$

証明したこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2') \cap \mathcal{J}\}$$

帰結：$X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ かどうか判定するには？

1. 先に定義した $\mathcal{I}_1', \mathcal{I}_2', \mathcal{J}$ を考える
2. $X_1' = \{(e,1) \mid e \in X\}, X_2' = \{(e,2) \mid e \in X\}$ として，
   制限 $\mathcal{I}_1'|X_1', \mathcal{I}_2'|X_2'$ を考える
   - ∗ 注意：$(\mathcal{I}_1'|X_1') \oplus (\mathcal{I}_2'|X_2') = (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2')|(X_1' \cup X_2')$
3. $\max\{|X'| \mid X' \in (\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2')|(X_1' \cup X_2') \cap \mathcal{J}|(X_1' \cup X_2')\}$ を計算
4. この最大値が $|X|$ に等しければ，$X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$
   そうでなければ，$X \notin \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

残った時間の使い方

- 授業評価アンケート
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK