離散最適化基礎論 第 9 回
マトロイドの交わり

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 12 月 25 日

最終更新：2015 年 12 月 27 日　22:23

スケジュール 前半

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

マトロイドに対する次の 2 操作とその応用を理解する

- マトロイドの交わり：マトロイドであるとは限らない
  - 応用：二部グラフの最大マッチング問題
  - 応用：最小有向木問題 (最大有向木問題)
- マトロイドの合併：必ずマトロイドになる
  - 応用：全域木の詰め込み

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足

- (I1) と (I2) は $\mathcal{I}$ が独立集合族であることを意味する
- (I3) を増加公理 (augmentation property) と呼ぶことがある

用語

- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ

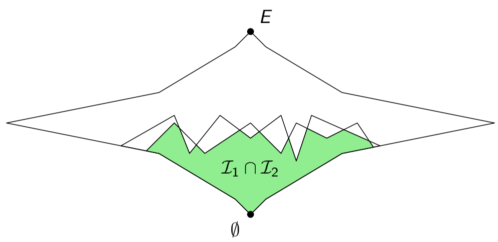
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の交わりとは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



マトロイドの交わりがマトロイドであるとは限らない

次のような例を考える

$$
\begin{aligned}
E &= \{1,2,3,4\},\\
\mathcal{I}_1 &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\},\\
\mathcal{I}_2 &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\}\},\\
\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2 &= \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,4\}\}
\end{aligned}
$$

観察

$\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2$ はマトロイドであるが，$\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ はマトロイドではない

$X=\{1,4\}, Y=\{2\}$ とすると，$X,Y\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ かつ $|X|>|Y|$ であるが，
$X-Y$ のどの要素を Y に付け加えても，$\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ の要素にならない

- $Y\cup\{1\}=\{1,2\}\notin\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$
- $Y\cup\{4\}=\{2,4\}\notin\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$

つまり，$\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ は (I3) を満たさない

マトロイドの交わり：重要性

マトロイド $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2$

マトロイドの交わりの重要性 (1)

次の問題が多項式時間で解ける

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{e\in X} w(e)\\
\text{subject to} & X\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2
\end{array}
$$

(マトロイドの最大重み共通独立集合問題)

注意：貪欲アルゴリズムで解けるわけではない

マトロイドの交わりの重要性 (2)

様々な問題をモデル化できる

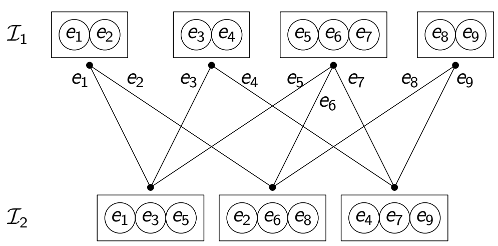
- 例 1：二部グラフの最大マッチング問題
- 例 2：最小有向木問題

目次

例 1：二部グラフの最大マッチング問題

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



二部グラフ $G=(U,V;E)$ に対して，要素数最大のマッチングを求めたい

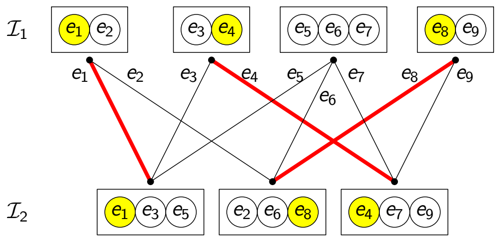
マッチングとは？ (復習)

辺部分集合で，任意の頂点に接続する辺の数が 1 以下であるもの

例 1：二部グラフの最大マッチング問題

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



頂点 v に接続する辺の集合を $\delta(v)$ として，次のマトロイドを考える

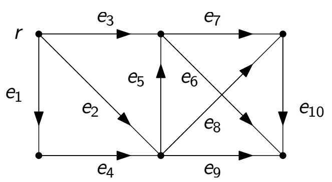
$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(u)| \leq 1\ (\forall\, u \in U)\},\\ \mathcal{I}_2 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(v)| \leq 1\ (\forall\, v \in V)\}\end{aligned}$$

例 2：最小有向木問題

最小有向木問題は

閉路マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる

考えるのは有向グラフ

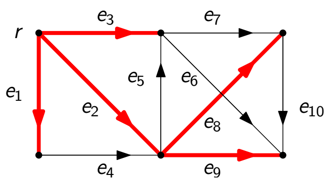


例 2：最小有向木問題

最小有向木問題は

閉路マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる

頂点 r を根とする有向木とは，
r から各頂点へ至る有向道がちょうど 1 つ存在するような部分グラフ



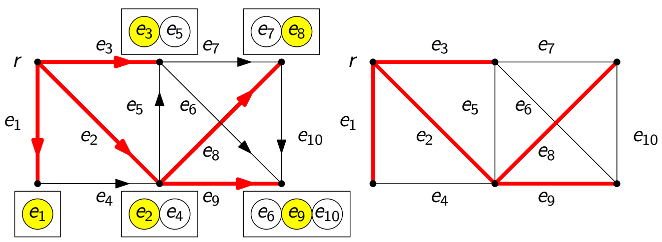
有向木：arborescence, out-tree, branching

例 2：最小有向木問題

最小有向木問題は

閉路マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる

考えるマトロイドの 1 つは，
有向グラフの向きを無視してできる無向グラフの閉路マトロイド



もう 1 つは「r 以外の各頂点に入る弧数が 1 以下」という分割マトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$

マトロイドの交わりの重要性 (1)　(再掲)

次の問題が多項式時間で解ける

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

(マトロイドの最大重み共通独立集合問題)

注意 (あるいは，未解決問題)

次の問題が多項式時間で解けるか，知られていない

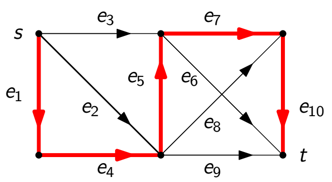
$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \end{array}$$

より厳密に言うと，この問題は NP 困難

有向ハミルトン道問題は

分割マトロイドと分割マトロイドと閉路マトロイドの交わりとして
モデル化できる

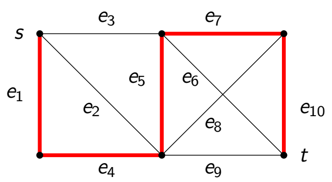
s から t へ至る有向ハミルトン道とは，
s から t へ至る有向道で，すべての頂点を一度ずつ通るもののこと



これは難しい問題 (NP 完全問題)

有向ハミルトン道問題は

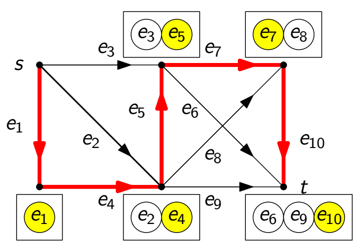
分割マトロイドと分割マトロイドと閉路マトロイドの交わりとして
モデル化できる



考えるマトロイド $\mathcal{I}_1$：
有向グラフの向きを無視したグラフの閉路マトロイド

有向ハミルトン道問題は

分割マトロイドと分割マトロイドと閉路マトロイドの交わりとして
モデル化できる

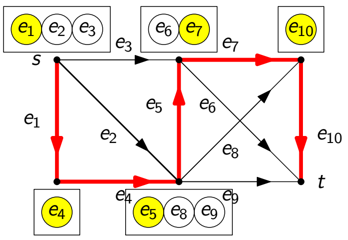


考えるマトロイド $\mathcal{I}_2$：
「s 以外の各頂点に入る弧数が 1 以下」という分割マトロイド

3 つのマトロイドの交わり：NP 困難性 (4)

有向ハミルトン道問題は

分割マトロイドと分割マトロイドと閉路マトロイドの交わりとしてモデル化できる

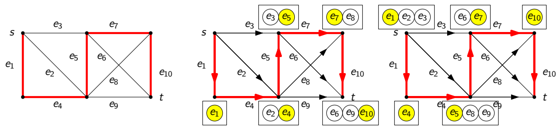


考えるマトロイド $\mathcal{I}_3$：
「t 以外の各頂点から出る弧数が 1 以下」という分割マトロイド

3 つのマトロイドの交わり：NP 困難性 (5)

有向ハミルトン道問題は

分割マトロイドと分割マトロイドと閉路マトロイドの交わりとしてモデル化できる



次の問題を考える

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 \end{array}$$

観察

この問題の最適値 = 頂点数 − 1 ⇔ 有向ハミルトン道が存在

目次

マトロイドの合併

非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併 (union) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**合併**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset\}$$

非空な有限集合 E_1, E_2，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和 (direct sum) とは？ (復習)

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**直和**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

合併と直和は似ているが，少し違う

マトロイドの合併はマトロイド

非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ は E 上のマトロイド

証明の方針

1. マトロイドの直和はマトロイド (前回証明した)
2. 「合併」を「直和」に帰着する

そのための補題を準備

マトロイドの合併はマトロイド：補題

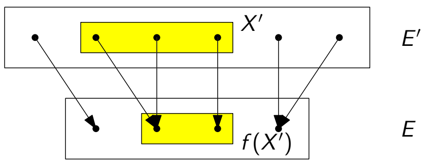
非空な有限集合 E, E'，マトロイド $\mathcal{I}' \subseteq 2^{E'}$

補題

任意の $f\colon E' \to E$ を考えて，集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を次のように定義する

$$\mathcal{I} = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'\}$$

このとき，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド



写像の像 (復習)

$$f(X') = \{x \mid \text{ある } x' \in X' \text{ に対して，} \ x = f(x')\}$$

マトロイドの合併はマトロイド：補題 (証明 1)

非空な有限集合 E, E'，マトロイド $\mathcal{I}' \subseteq 2^{E'}$

補題

任意の $f\colon E' \to E$ を考えて，集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を次のように定義する

$$\mathcal{I} = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'\}$$

このとき，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

証明：$\mathcal{I}$ が (I1)，(I2)，(I3) を満たすことを確認すればよい

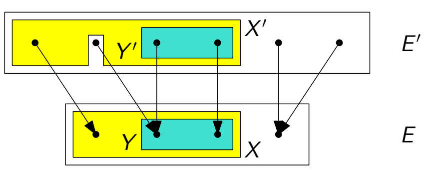
$\boxed{\mathcal{I} \text{ が (I1) を満たすことを確認する}}$

- (I1) より，$\emptyset \in \mathcal{I}'$
- $\mathcal{I}$ の定義と $\emptyset \in \mathcal{I}'$ より，$f(\emptyset) \in \mathcal{I}$
- 像の定義より，$f(\emptyset) = \emptyset$
- したがって，$\emptyset \in \mathcal{I}$

マトロイドの合併はマトロイド：補題 (証明 2)

$\boxed{\mathcal{I} \text{ が (I2) を満たすことを確認する}}$

- $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ と仮定する
- $X \in \mathcal{I}$ より，ある $X' \in \mathcal{I}'$ が存在して，$X = f(X')$
- ここで，$Y' = \{x' \mid x' \in X', f(x') \in Y\}$ とする
- $Y' \subseteq X'$ なので，$X' \in \mathcal{I}'$ と (I2) より，$Y' \in \mathcal{I}'$
- また，$Y = f(Y')$ となる　(演習問題)
- したがって，$\mathcal{I}$ の定義より，$Y \in \mathcal{I}$



マトロイドの合併はマトロイド：補題 (証明 3)

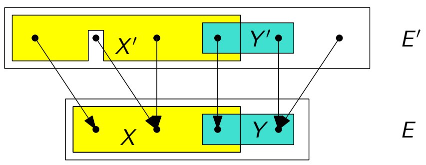
$\boxed{\mathcal{I} \text{ が (I3) を満たすことを確認する}}$

- $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ と仮定する
- X' を，$X = f(Z')$ を満たす $Z' \in \mathcal{I}'$ の中で，要素数最小のものとする
    - 別の言い方：集合族 $\mathcal{F}_X = \{Z' \mid Z' \in \mathcal{I}', X = f(Z')\}$ を考え，$\mathcal{F}_X$ の中で要素数最小のものを X' とする
    - 注意：$X \in \mathcal{I}$ であるから，$\mathcal{F}_X \neq \emptyset$
- 同様に，
  Y' を，$Y = f(Z')$ を満たす $Z' \in \mathcal{I}'$ の中で，要素数最小のものとする

マトロイドの合併はマトロイド：補題 (証明 4)

$\boxed{\mathcal{I} \text{ が (I3) を満たすことを確認する}}$ (続き)

- ここで，$|X| = |X'|$，$|Y| = |Y'|$ (演習問題)
- したがって，$X', Y' \in \mathcal{I}'$ かつ $|X'| > |Y'|$ が成り立つ
- (I3) より，ある $e' \in X' - Y'$ が存在して，$Y' \cup \{e'\} \in \mathcal{I}'$
- このとき，$f(e') \in f(X') - f(Y')$
- したがって，$e = f(e')$ とすると，$e \in X - Y$ であり，
  $Y \cup \{e\} = f(Y') \cup \{f(e')\} = f(Y' \cup \{e'\}) \in \mathcal{I}$ □



マトロイドの合併はマトロイド：証明の方針 (再)

非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併 (union) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の合併とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset\}$$

マトロイドの合併はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ は E 上のマトロイド

証明の方針

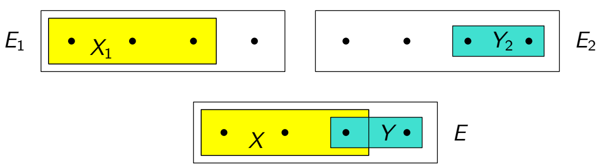
1. マトロイドの直和はマトロイド (前回証明した)
2. 「合併」を「直和」に帰着する

補題を用いて証明を行う

マトロイドの合併はマトロイド：証明 (1)

証明：次のような集合を考える

- $E_1 = \{(e, 1) \mid e \in E\}$, $E_2 = \{(e, 2) \mid e \in E\}$,
  $\mathcal{I}_1' = \{X' \mid \text{ある } X \in \mathcal{I}_1 \text{ に対して，} \quad X' = \{(e, 1) \mid e \in X\}\}$,
  $\mathcal{I}_2' = \{X' \mid \text{ある } X \in \mathcal{I}_2 \text{ に対して，} \quad X' = \{(e, 2) \mid e \in X\}\}$
- このとき，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ であり，
  $\mathcal{I}_1'$ は E_1 上のマトロイド，$\mathcal{I}_2'$ は E_2 上のマトロイド
- また，$\mathcal{I}_1' \oplus \mathcal{I}_2'$ は $E_1 \cup E_2$ 上のマトロイド

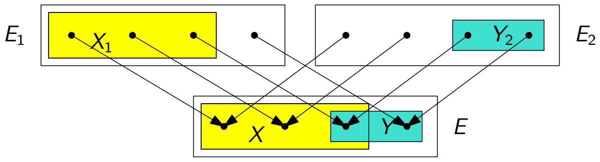


マトロイドの合併はマトロイド：証明 (2)

- 写像 $f\colon E_1 \cup E_2 \to E$ を次のように定義

  任意の $(e,1) \in E_1$ に対して，　$f((e,1)) = e$,

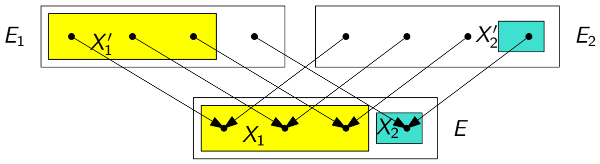
  任意の $(e,2) \in E_2$ に対して，　$f((e,2)) = e$
- このとき，$\mathcal{I}_1 = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_1\}$, $\mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_2\}$
- 補題より，$\mathcal{I} = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2\}$ はマトロイド
- $\boxed{\text{今から証明すること}}$: $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$



マトロイドの合併はマトロイド：証明 (3)

$\boxed{\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{I} \text{ の証明}}$

- $X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ とする
- ある $X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して，$X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X = X_1 \cup X_2$
- ある $X'_1 \in \mathcal{I}'_1, X'_2 \in \mathcal{I}'_2$ が存在して，$X_1 = f(X'_1)$, $X_2 = f(X'_2)$
- $X' = X'_1 \cup X'_2$ とする
- $X' \in \mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2$ なので，$f(X') \in \mathcal{I}$
- ここで，$f(X') = f(X'_1 \cup X'_2) = f(X'_1) \cup f(X'_2) = X_1 \cup X_2 = X$
- したがって，$X \in \mathcal{I}$



マトロイドの合併はマトロイド：証明 (4)

$\boxed{\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 \text{ の証明}}$

- $X \in \mathcal{I}$ とする
- ある $X' \in \mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2$ が存在して，$X = f(X')$
- つまり，ある $X'_1 \in \mathcal{I}'_1$ と $X'_2 \in \mathcal{I}'_2$ が存在して，$X' = X'_1 \cup X'_2$
- $X_1 = f(X'_1)$, $X_2 = f(X'_2) - f(X'_1)$ とすると

$$f(X') = f(X'_1 \cup X'_2) = f(X'_1) \cup f(X'_2) = f(X'_1) \cup (f(X'_2) - f(X'_1)) = X_1 \cup X_2$$

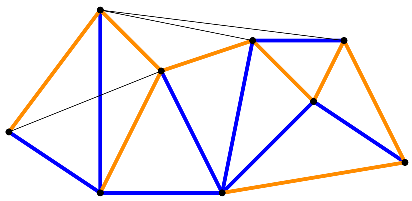
- $X'_1 \in \mathcal{I}'_1$ より，$X_1 = f(X'_1) \in \mathcal{I}_1$
- $X'_2 \in \mathcal{I}'_2$ より，$f(X'_2) \in \mathcal{I}_2$
- $X_2 = f(X'_2) - f(X'_1) \subseteq f(X'_2)$ なので，(I2) より，$X_2 \in \mathcal{I}_2$
- したがって，$X = f(X') = X_1 \cup X_2 \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

目次

応用：辺素な全域木

辺素な 2 つの全域木を見つける問題は

閉路マトロイドと閉路マトロイドの合併でモデル化できる



辺素：辺集合が互いに素

応用：辺素な全域木 (続き)

辺素な 2 つの全域木を見つける問題は

閉路マトロイドと閉路マトロイドの合併でモデル化できる

無向グラフ $G = (V, E)$ 上の閉路マトロイドを $\mathcal{I}$ として

次の問題を考える　　貪欲アルゴリズムで解ける ???

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \end{array}$$

観察

最適値 $= 2(|V| - 1)$ $\Leftrightarrow$ G が辺素な 2 つの全域木を持つ

辺素な全域木：貪欲アルゴリズム？

次の問題を考える　　貪欲アルゴリズムで解ける ???

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \end{array}$$

貪欲アルゴリズム

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ とする

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. すべての $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$ に対して，以下を繰り返し
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \not\in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \end{cases}$$
3. X を出力

辺素な全域木：貪欲アルゴリズム？ (2)

貪欲アルゴリズム

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ とする

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. すべての $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$ に対して，以下を繰り返し
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \not\in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \end{cases}$$
3. X を出力

問題点

「$X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I}$」の条件判定をどのように行うのか？

自明ではない $\rightsquigarrow$ 実は,「マトロイドの交わり」を使うと効率よく行える

目次

今回のまとめ

今日の目標

マトロイドに対する次の 2 操作とその応用を理解する

- マトロイドの交わり：マトロイドであるとは限らない
  - 応用：二部グラフの最大マッチング問題
  - 応用：最小有向木問題 (最大有向木問題)
- マトロイドの合併：必ずマトロイドになる
  - 応用：全域木の詰め込み
  - 貪欲アルゴリズムの実行にマトロイドの交わりが使える (次回以降)

次回以降の予告

- マトロイド交わり定理の証明
- マトロイド交わり問題に対する効率的アルゴリズム

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK