

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015年12月18日

最終更新: 2015年12月18日 16:45

スケジュール 前半

- * 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- * 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- * 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

スケジュール 後半 (予定)

- * 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- * 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- * 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理: アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- * 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- * 期末試験 (2/12?)

注意: 予定の変更もありうる

テーマ: 解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか?

↪ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か?

回答

よく分かっていない

しかし、部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイドの構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的なアルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理論理」がある

この講義では、その一端に触れたい

今日の目標

マトロイドから別のマトロイドを得る操作を使えるようになる

扱う操作

- ▶ 打ち切り
- ▶ 制限 (除去)
- ▶ 縮約
- ▶ 直和

マトロイドの定義：復習

非空な有限集合 E , 有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

\mathcal{I} が E 上のマトロイド (matroid) であるとは, 次の 3 条件を満たすこと

- (1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば, $Y \in \mathcal{I}$
- (3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば, ある $e \in X - Y$ が存在して, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足

- ▶ (1) と (2) は \mathcal{I} が独立集合族であることを意味する
- ▶ (3) を **増加公理** (augmentation property) と呼ぶことがある

用語

- ▶ \mathcal{I} の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を, このマトロイドの**独立集合**と呼ぶ

目次

- ① マトロイドの打ち切り
- ② マトロイドの制限と除去
- ③ マトロイドの縮約
- ④ マトロイドの直和
- ⑤ 今日のまとめ

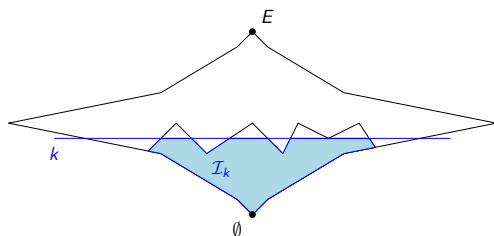
マトロイドの打ち切り

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 自然数 $k \geq 0$

マトロイドの打ち切り (truncation) とは？

\mathcal{I} の**打ち切り**とは, 次の集合族 \mathcal{I}_k

$$\mathcal{I}_k = \{X \mid X \in \mathcal{I}, |X| \leq k\}$$



マトロイドの打ち切りはマトロイド

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 自然数 $k \geq 0$

命題: マトロイドの打ち切りはマトロイド

マトロイド \mathcal{I} の打ち切り \mathcal{I}_k も E 上のマトロイドである

証明: \mathcal{I}_k も (I1), (I2), (I3) を満たすことを確認すればよい

\mathcal{I}_k が (I1) を満たすことを確認する

- ▶ (I1) より, $\emptyset \in \mathcal{I}$ であり, $|\emptyset| = 0 \leq k$
- ▶ したがって, $\emptyset \in \mathcal{I}_k$

マトロイドの打ち切りはマトロイド: 続き

証明 (続き):

\mathcal{I}_k が (I2) を満たすことを確認する

- ▶ $X \in \mathcal{I}_k$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- ▶ $X \in \mathcal{I}_k$ より, $X \in \mathcal{I}$ かつ $|X| \leq k$
- ▶ $Y \subseteq X$ より, $|Y| \leq k$
- ▶ $Y \subseteq X$ と (I2) より, $Y \in \mathcal{I}$
- ▶ したがって, $Y \in \mathcal{I}_k$

\mathcal{I}_k が (I3) を満たすことを確認する

- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}_k$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}_k$ より, $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X|, |Y| \leq k$
- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ なので, (I3) より, ある $e \in X - Y$ が存在して, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- ▶ $|X| > |Y|$ と $|X| \leq k$ より, $|Y| \leq k - 1$
- ▶ したがって, $|Y \cup \{e\}| \leq (k - 1) + 1 = k$
- ▶ つまり, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}_k$ □

マトロイドの打ち切りと一様マトロイド (1)

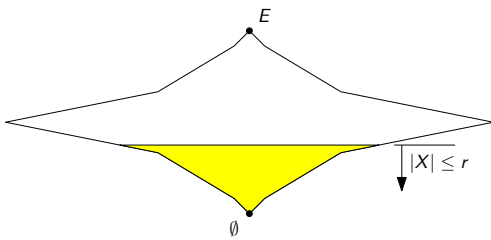
非空な有限集合 E , 自然数 $r \geq 0$

一様マトロイドの定義 (復習)

有限集合族 \mathcal{I} を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると, \mathcal{I} は E 上のマトロイド (一様マトロイドと呼ばれる)



マトロイドの打ち切りと一様マトロイド (2)

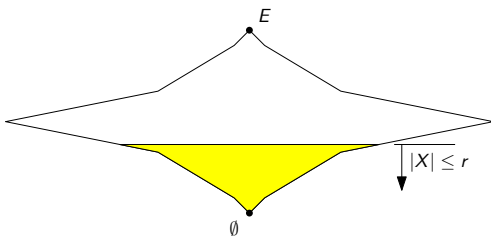
非空な有限集合 E , 自然数 $r \geq 0$

観察: 一様マトロイドはマトロイドの打ち切り

有限集合族 \mathcal{I} を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると, \mathcal{I} はマトロイド 2^E を r で打ち切ったもの



- ① マトロイドの打ち切り
- ② マトロイドの制限と除去
- ③ マトロイドの縮約
- ④ マトロイドの直和
- ⑤ 今日のまとめ

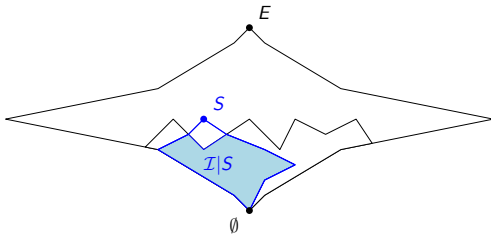
マトロイドの制限

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの制限 (restriction) とは？

\mathcal{I} の制限とは, 次の集合族 $\mathcal{I}|S$

$$\mathcal{I}|S = \{X \mid X \in \mathcal{I}, X \subseteq S\}$$



マトロイドの制限はマトロイド

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの制限はマトロイド

マトロイド \mathcal{I} の制限 $\mathcal{I}|S$ は S 上のマトロイド

証明: $\mathcal{I}|S$ も (I1), (I2), (I3) を満たすことを確認すればよい

$\mathcal{I}|S$ が (I1) を満たすことを確認する

- ▶ (I1) より, $\emptyset \in \mathcal{I}$ であり, $\emptyset \subseteq S$
- ▶ したがって, $\emptyset \in \mathcal{I}|S$

マトロイドの制限はマトロイド: 続き

証明 (続き):

$\mathcal{I}|S$ が (I2) を満たすことを確認する

- ▶ $X \in \mathcal{I}|S$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- ▶ $X \in \mathcal{I}|S$ より, $X \in \mathcal{I}$ かつ $X \subseteq S$
- ▶ $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq S$ より, $Y \subseteq S$
- ▶ $Y \subseteq X$ と (I2) より, $Y \in \mathcal{I}$
- ▶ したがって, $Y \in \mathcal{I}|S$

$\mathcal{I}|S$ が (I3) を満たすことを確認する

- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}|S$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}|S$ より, $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $X, Y \subseteq S$
- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ なので, (I3) より, ある $e \in X - Y$ が存在して, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- ▶ $e \in X \subseteq S$ なので, $e \in S$
- ▶ したがって, $Y \cup \{e\} \subseteq S$
- ▶ つまり, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}|S$

□

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの除去 (deletion) とは？

\mathcal{I} の除去とは, 次の集合族 $\mathcal{I} \setminus S$

$$\mathcal{I} \setminus S = \{X - S \mid X \in \mathcal{I}\}$$

演習問題

マトロイド \mathcal{I} の除去 $\mathcal{I} \setminus S$ は $E - S$ 上のマトロイド

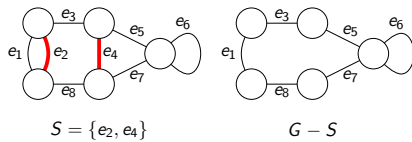
▶ 実際は, $\mathcal{I} \setminus S = \mathcal{I}(E - S)$ となる

閉路マトロイドの制限・除去

グラフ $G = (V, E)$, 辺部分集合 $S \subseteq E$

閉路マトロイドの除去

グラフ G の閉路マトロイド \mathcal{I} の除去 $\mathcal{I} \setminus S$ は,
グラフ $G - S$ の閉路マトロイド



マトロイドの制限の階数関数

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの制限 (restriction) とは？

\mathcal{I} の制限とは, 次の集合族 $\mathcal{I}|S$

$$\mathcal{I}|S = \{X \mid X \in \mathcal{I}, X \subseteq S\}$$

マトロイドの制限の階数関数

(演習問題)

\mathcal{I} の階数関数を r とするとき, $\mathcal{I}|S$ の階数関数 r' は次のように書ける
任意の $X \subseteq S$ に対して, $r'(X) = r(X)$

後の講義で, これを用いる予定

目次

- ① マトロイドの打ち切り
- ② マトロイドの制限と除去
- ③ マトロイドの縮約
- ④ マトロイドの直和
- ⑤ 今日のまとめ

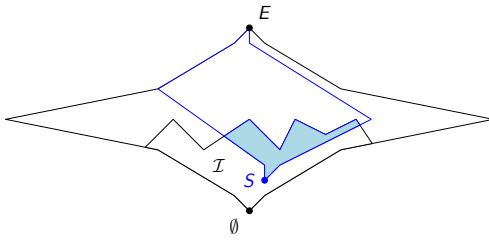
マトロイドの縮約

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 独立集合 $S \in \mathcal{I}$

マトロイドの縮約 (contraction) とは？

\mathcal{I} の縮約とは, 次の集合族 \mathcal{I}/S

$$\mathcal{I}/S = \{X \mid X \cup S \in \mathcal{I}, X \subseteq E - S\}$$



$S \notin \mathcal{I}$ のときにも縮約は定義できるが, 上とは違う式で行われる

マトロイドの縮約はマトロイド

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 独立集合 $S \in \mathcal{I}$

マトロイドの縮約はマトロイド

マトロイド \mathcal{I} の縮約 \mathcal{I}/S は $E - S$ 上のマトロイド

証明: \mathcal{I}/S も (I1), (I2), (I3) を満たすことを確認すればよい

\mathcal{I}/S が (I1) を満たすことを確認する

- ▶ 仮定より, $\emptyset \cup S = S \in \mathcal{I}$
- ▶ $\emptyset \subseteq E - S$ なので, $\emptyset \in \mathcal{I}/S$

マトロイドの縮約はマトロイド: 続き

証明 (続き):

\mathcal{I}/S が (I2) を満たすことを確認する

- ▶ $X \in \mathcal{I}/S$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- ▶ $X \in \mathcal{I}/S$ より, $X \cup S \in \mathcal{I}$ かつ $X \subseteq E - S$
- ▶ $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq E - S$ より, $Y \subseteq E - S$
- ▶ $Y \subseteq X$ より, $Y \cup S \subseteq X \cup S$ なので, (I2) より, $Y \cup S \in \mathcal{I}$
- ▶ したがって, $Y \in \mathcal{I}/S$

マトロイドの縮約はマトロイド: 続き (2)

証明 (続き):

\mathcal{I}/S が (I3) を満たすことを確認する

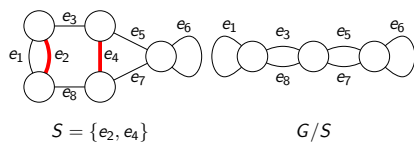
- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}/S$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}/S$ より, $X \cup S, Y \cup S \in \mathcal{I}$ かつ $X, Y \subseteq E - S$
- ▶ $X, Y \subseteq E - S$ より, $X \cap S, Y \cap S = \emptyset$
- ▶ これと $|X| > |Y|$ より, $|X \cup S| = |X| + |S| > |Y| + |S| = |Y \cup S|$
- ▶ $X \cup S, Y \cup S \in \mathcal{I}$ かつ $|X \cup S| > |Y \cup S|$ なので, (I3) より, ある $e \in (X \cup S) - (Y \cup S)$ が存在して, $(Y \cup S) \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- ▶ $X, Y \subseteq E - S$ なので, $(X \cup S) - (Y \cup S) = X - Y$ であり, $e \in X - Y$
- ▶ したがって, $Y \cup \{e\} \subseteq E - S$ であり, $(Y \cup \{e\}) \cup S = (Y \cup S) \cup \{e\}$
- ▶ つまり, $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}/S$ □

閉路マトロイドの縮約

グラフ $G = (V, E)$, 辺部分集合 $S \subseteq E$

閉路マトロイドの縮約

グラフ G の閉路マトロイド \mathcal{I} の縮約 \mathcal{I}/S は,
グラフ G/S の閉路マトロイド



マトロイドの縮約の階数関数

非空な有限集合 E , マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$, 独立集合 $S \in \mathcal{I}$

マトロイドの縮約 (contraction) とは?

\mathcal{I} の縮約とは, 次の集合族 \mathcal{I}/S

$$\mathcal{I}/S = \{X \mid X \cup S \in \mathcal{I}, X \subseteq E - S\}$$

マトロイドの縮約の階数関数 (演習問題)

\mathcal{I} の階数関数を r とするとき, \mathcal{I}/S の階数関数 r' は次のように書ける
任意の $X \subseteq E - S$ に対して, $r'(X) = r(X \cup S) - r(S)$

後の講義で, これを用いる予定

目次

- ① マトロイドの打ち切り
- ② マトロイドの制限と除去
- ③ マトロイドの縮約
- ④ マトロイドの直和
- ⑤ 今日のまとめ

マトロイドの直和

非空な有限集合 E_1, E_2 , $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 2つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和 (direct sum) とは?

\mathcal{I}_1 と \mathcal{I}_2 の直和とは, 次の集合族 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

マトロイドの直和はマトロイド

非空な有限集合 E_1, E_2 , $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 2つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の直和 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ もマトロイド

証明: $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ も (I1), (I2), (I3) を満たすことを確認すればよい

$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ が (I1) を満たすことを確認する

- ▶ (I1) より, $\emptyset \in \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ である
- ▶ $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ なので, $\emptyset \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

マトロイドの直和はマトロイド: 続き

証明 (続き):

$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ が (I2) を満たすことを確認する

- ▶ $X \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- ▶ ある $X_1 \in \mathcal{I}_1$ と $X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して, $X = X_1 \cup X_2$
- ▶ \therefore ある $Y_1 \subseteq X_1$ と $Y_2 \subseteq X_2$ が存在して, $Y = Y_1 \cup Y_2$
- ▶ (I2) より, $Y_1 \in \mathcal{I}_1, Y_2 \in \mathcal{I}_2$
- ▶ したがって, $Y \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

マトロイドの直和はマトロイド: 続き (2)

証明 (続き):

$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ が (I3) を満たすことを確認する

- ▶ $X, Y \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- ▶ $X \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ より, ある $X_1 \in \mathcal{I}_1$ と $X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して, $X = X_1 \cup X_2$
- ▶ 同様に, ある $Y_1 \in \mathcal{I}_1$ と $Y_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して, $Y = Y_1 \cup Y_2$
- ▶ $X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2$ で, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ より, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
- ▶ 同様に, $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$
- ▶ したがって, $|X| = |X_1| + |X_2|, |Y| = |Y_1| + |Y_2|$
- ▶ $|X| > |Y|$ より, $|X_1| > |Y_1|$ または $|X_2| > |Y_2|$ が成り立つ
- ▶ $|X_1| > |Y_1|$ が成り立つとする ($|X_2| > |Y_2|$ の場合も同様になる)
- ▶ $X_1, Y_1 \in \mathcal{I}_1$ と (I3) より, ある $e \in X_1 - Y_1$ が存在して, $Y_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1$
- ▶ $\therefore Y \cup \{e\} = (Y_1 \cup Y_2) \cup \{e\} = (Y_1 \cup \{e\}) \cup Y_2 \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ □

マトロイドの直和と分割マトロイド (1)

非空な有限集合 E , 集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$,
自然数 $r_1, r_2, \dots, r_k \geq 0$

命題 (証明は後の講義で行う, と第2回で述べた)

有限集合族 \mathcal{I} を

$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid \text{任意の } i \in \{1, \dots, k\} \text{ に対して, } |X \cap E_i| \leq r_i\}$
と定義すると, \mathcal{I} は E 上のマトロイド

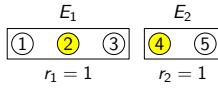
- ▶ E 上の分割マトロイド (partition matroid) と呼ばれる

例

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}, E_1 = \{1, 2, 3\}, E_2 = \{4, 5\}, r_1 = 1, r_2 = 1$ のとき
 $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$

例

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{4, 5\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ のとき
 $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$



直感: \mathcal{I} の要素を作るとき, E_i から高々 r_i 個の要素を選ぶ

この例において

$$\mathcal{I} = U_{1,3} \oplus U_{1,2}$$

非空な有限集合 E , 集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \dots, E_k\}$,
 自然数 $r_1, r_2, \dots, r_k \geq 0$

命題 (証明は後の講義で行う, と第 2 回で述べた)

有限集合族 \mathcal{I} を

$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid \text{任意の } i \in \{1, \dots, k\} \text{ に対して, } |X \cap E_i| \leq r_i\}$
 と定義すると, \mathcal{I} は E 上のマトロイド

$n_i = |E_i|$ とすると

$$\mathcal{I} = U_{r_1, n_1} \oplus U_{r_2, n_2} \oplus \dots \oplus U_{r_k, n_k}$$

と表すことができる

帰結

つまり, 分割マトロイドはマトロイド □

目次

- ① マトロイドの打ち切り
- ② マトロイドの制限と除去
- ③ マトロイドの縮約
- ④ マトロイドの直和
- ⑤ 今日のまとめ

今回のまとめ

今日の目標

マトロイドから別のマトロイドを得る操作を使えるようになる

扱う操作

- ▶ 打ち切り
- ▶ 制限 (除去)
- ▶ 縮約
- ▶ 直和

次回

マトロイドに対する別の操作

- ▶ マトロイドの交わり: マトロイドであるとは限らない
- ▶ マトロイドの合併: 必ずマトロイドになる

この 2 つは応用上, とても重要

- ▶ 演習問題をやる
 - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
 - ▶ 教員は巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK