離散最適化基礎論 第 5 回
マトロイドとグラフの全域木

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 11 月 13 日

最終更新：2016 年 8 月 23 日　11:51

スケジュール 前半 (予定)

⋆	休講 (卒研準備発表会)	(10/2)
1	組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割	(10/9)
⋆	休講 (海外出張)	(10/16)
2	マトロイドの定義と例	(10/23)
3	マトロイドの基と階数関数	(10/30)
4	グラフとマトロイド	(11/6)
5	マトロイドとグラフの全域木	(11/13)
⋆	休講 (調布祭)	(11/20)
6	マトロイドに対する貪欲アルゴリズム	(11/27)
7	マトロイドのサーキット	(12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

⋆	休講 (国内出張)	(12/11)
8	マトロイドに対する操作	(12/18)
9	マトロイドの交わり	(12/25)
⋆	冬季休業	(1/1)
10	マトロイド交わり定理	(1/8)
⋆	休講 (センター試験準備)	(1/15)
11	マトロイド交わり定理：アルゴリズム	(1/22)
12	最近のトピック	(1/29)
⋆	授業等調整日 (予備日)	(2/5)
⋆	期末試験	(2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標
グラフの最小全域木問題とマトロイドの関係を探る
- グラフの最小全域木問題 $\leftrightarrow$ マトロイドの最小基問題
- Kruskal のアルゴリズム $\leftrightarrow$ 貪欲アルゴリズム
- 貪欲アルゴリズムの正当性
- 「貪欲アルゴリズムの正当性」におけるマトロイドの必要性

目次

グラフと閉路マトロイド

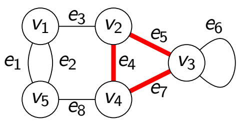
グラフ $G = (V, E)$，G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$

命題：閉路マトロイドをグラフの用語で捉え直す
G の辺部分集合 $X \subseteq E$ に対して

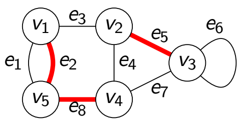
$$X \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \text{グラフ } G[X] = (V, X) \text{ が閉路を含まない}$$

例：

$\{e_4, e_5, e_7\} \notin \mathcal{I}$



$\{e_2, e_5, e_8\} \in \mathcal{I}$



森と木：証明の前に用語の整理

無向グラフ $G = (V, E)$

森と木
- G が森 (あるいは林，forest) であるとは，G が閉路を含まないこと
- G が木 (tree) であるとは，G が連結であり，閉路を含まないこと

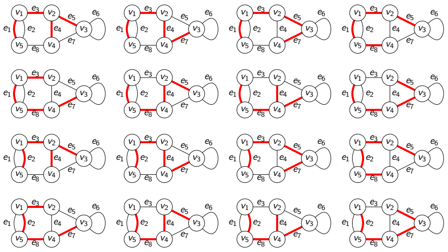
全域森と全域木
$X \subseteq E$ に対して，$G[X] = (V, X)$ とする
- $G[X]$ が G の全域森 (spanning forest) であるとは，
  $G[X]$ が閉路を含まないこと
- $G[X]$ が G の全域木 (spanning tree) であるとは，
  $G[X]$ が連結であり，閉路を含まないこと

グラフの閉路マトロイド：基族

例において，G の閉路マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{&\{e_1,e_3,e_4,e_5\},\{e_1,e_3,e_4,e_7\},\{e_1,e_3,e_5,e_7\},\{e_1,e_3,e_5,e_8\},\\ &\{e_1,e_3,e_7,e_8\},\{e_1,e_4,e_5,e_8\},\{e_1,e_4,e_7,e_8\},\{e_1,e_5,e_7,e_8\},\\ &\{e_2,e_3,e_4,e_5\},\{e_2,e_3,e_4,e_7\},\{e_2,e_3,e_5,e_7\},\{e_2,e_3,e_5,e_8\},\\ &\{e_2,e_3,e_7,e_8\},\{e_2,e_4,e_5,e_8\},\{e_2,e_4,e_7,e_8\},\{e_2,e_5,e_7,e_8\}\}\end{aligned}$$

閉路マトロイドの基が
G の全域木に対応
($\because$ G が連結)



グラフと閉路マトロイド：用語の対応

連結グラフ G	G の閉路マトロイド
G の全域森	独立集合
G の全域木	基
閉路を含む G の部分グラフ	従属集合
G の閉路	サーキット

復習：E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ に対して

- $X \subseteq E$ が $\mathcal{I}$ の従属集合であるとは，$X \notin \mathcal{I}$
- $X \subseteq E$ が $\mathcal{I}$ のサーキットであるとは，
  $X \notin \mathcal{I}$ で，任意の $e \in X$ に対して，$X - \{e\} \in \mathcal{I}$
  (つまり，X は極小な従属集合)

注意：文献では「全域森」を違う意味で使うこともある

目次

グラフの最小全域木問題

グラフの最小全域木問題とは？

連結無向グラフ $G = (V, E)$ と重み $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{e \in B} c(e) \\ \text{subject to} \quad & G[B] = (V, B) \text{ は } G \text{ の全域木} \end{aligned}$$

グラフの最小全域木問題：Kruskal のアルゴリズム

最小全域木問題を効率よく解く方法

Kruskal のアルゴリズム

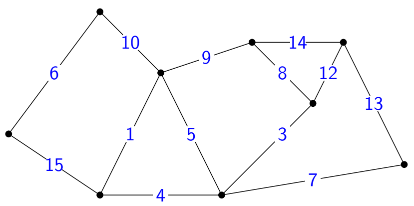
1. G の辺を費用の小さい順に並べる
   ($c(e_1) \le c(e_2) \le \cdots \le c(e_n)$ であると仮定する)
2. $B \leftarrow \emptyset$
3. すべての $i \leftarrow 1, \ldots, n$ に対して，以下を繰り返し
$$B \leftarrow \begin{cases} B \cup \{e_i\} & (B \cup \{e_i\} \text{ が閉路を含まないとき}) \\ B & (B \cup \{e_i\} \text{ が閉路を含むとき}) \end{cases}$$
4. B を出力

これは正しいアルゴリズム (必ず最小全域木を出力する)

- 証明：『アルゴリズム論第一』か『アルゴリズム論第二』を参照
- 別証明：この講義 (マトロイドを使用)

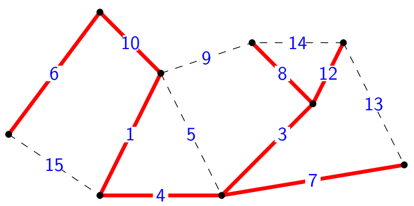
グラフの最小全域木問題：例

辺の上に書いてある数字が，その辺の重み



グラフの最小全域木問題：例 — Kruskal のアルゴリズムを実行

辺の上に書いてある数字が，その辺の重み



Kruskal のアルゴリズム：最小全域木を計算する貪欲アルゴリズム

グラフの最小全域木問題：閉路マトロイドのことばで言い換える

グラフの最小全域木問題とは？: 閉路マトロイドで言い換え

連結無向グラフ $G = (V, E)$ と重み $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{e \in B} c(e) \\ \text{subject to} & B \text{ は } G \text{ の閉路マトロイド } \mathcal{I} \text{ の基} \end{array}$$

グラフの最小全域木問題：マトロイドに一般化

マトロイドの最小基問題

有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と重み $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{e \in B} c(e) \\ \text{subject to} & B \text{ は } \mathcal{I} \text{ の基} \end{array}$$

マトロイドの最小基問題とマトロイドの最大独立集合問題

マトロイドの最小基問題

有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と重み $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{e \in B} c(e) \\ \text{subject to} & B \text{ は } \mathcal{I} \text{ の基} \end{array}$$

一方，第 1 回講義で考えた問題は次のもの

マトロイドの最大独立集合問題

有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I} \end{array}$$

マトロイドの最小基問題とマトロイドの最大独立集合問題：関係

非空な有限集合 E, E 上のマトロイド $\mathcal{I}$, その基族 $\mathcal{B}$

命題

- 任意の $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ を考える
- このとき，$C = \sum_{e \in E} c(e)$ として，$w\colon E \to \mathbb{R}_+$ を次のように定義する

$$\text{任意の } e \in E \text{ に対して，} \quad w(e) = C - c(e)$$

このとき，

$$\underbrace{\min\left\{\sum_{e \in B} c(e) \,\middle|\, B \in \mathcal{B}\right\}}_{\text{最小基問題の最適値}} = C \cdot r(E) - \underbrace{\max\left\{\sum_{e \in X} w(e) \,\middle|\, X \in \mathcal{I}\right\}}_{\text{最大独立集合問題の最適値}}$$

- 補足：$r(E)$ は E の階数 ($= \mathcal{I}$ の基の要素数)
- 注意：任意の $e \in E$ に対して，$w(e) \geq 0$

マトロイドの最小基問題とマトロイドの最大独立集合問題：関係

非空な有限集合 E, E 上のマトロイド $\mathcal{I}$, その基族 $\mathcal{B}$

命題

- 任意の $c\colon E \to \mathbb{R}_+$ を考える
- このとき，$C = \sum_{e \in E} c(e)$ として，$w\colon E \to \mathbb{R}_+$ を次のように定義する

$$\text{任意の } e \in E \text{ に対して，} \quad w(e) = C - c(e)$$

このとき，

$$\underbrace{\min\left\{\sum_{e \in B} c(e) \,\middle|\, B \in \mathcal{B}\right\}}_{\text{最小基問題の最適値}} = C \cdot r(E) - \underbrace{\max\left\{\sum_{e \in X} w(e) \,\middle|\, X \in \mathcal{I}\right\}}_{\text{最大独立集合問題の最適値}}$$

意味

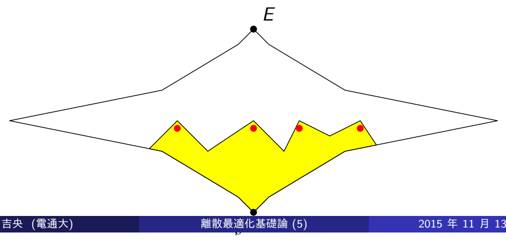
最大独立集合問題が解ければ，最小基問題も解ける

証明 (1)

観察 1

最大独立集合問題の最適解として，基であるものが存在する

- 独立集合 $X \in \mathcal{I}$ が最適解であるとする
- このとき，X を含む基 $B \in \mathcal{I}$ が存在 (cf. 演習問題 3.14)
- $X \subseteq B$ なので，$\sum_{e \in X} w(e) \le \sum_{e \in B} w(e)$
- したがって，B も最適解 $\square$



証明 (2)

観察 2

集合 $X, Y \subseteq E$ に対して，

$$\sum_{e \in X} c(e) \le \sum_{e \in Y} c(e) \quad \Leftrightarrow \quad C|X| - \sum_{e \in X} w(e) \le C|Y| - \sum_{e \in Y} w(e)$$

$$\begin{array}{rrcl} & C|X| - \sum_{e \in X} w(e) & \le & C|Y| - \sum_{e \in Y} w(e) \\ \Leftrightarrow & \sum_{e \in X} (C - w(e)) & \le & \sum_{e \in Y} (C - w(e)) \\ \Leftrightarrow & \sum_{e \in X} c(e) & \le & \sum_{e \in Y} c(e) \end{array} \quad \square$$

証明 (3)

- 観察 2 より，

$$\min\left\{ \sum_{e \in B} c(e) \,\middle|\, B \in \mathcal{B} \right\} = C \cdot r(E) - \max\left\{ \sum_{e \in B} w(e) \,\middle|\, B \in \mathcal{B} \right\}$$

- 観察 1 より

$$\max\left\{ \sum_{e \in B} w(e) \,\middle|\, B \in \mathcal{B} \right\} = \max\left\{ \sum_{e \in X} w(e) \,\middle|\, X \in \mathcal{I} \right\}$$

- したがって，

$$\min\left\{ \sum_{e \in B} c(e) \,\middle|\, B \in \mathcal{B} \right\} = C \cdot r(E) - \max\left\{ \sum_{e \in X} w(e) \,\middle|\, X \in \mathcal{I} \right\}$$

$\square$

目次

独立集合族に対する貪欲アルゴリズム

E 上の独立集合族 $\mathcal{F}$，重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$

最大独立集合問題に対する貪欲アルゴリズム

1. E の要素 e を $w(e)$ の大きい順に並べる
   ($w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$ であると仮定する)
2. $X \leftarrow \emptyset$
3. すべての $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$ に対して，以下を繰り返し
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{F} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{F} \text{ のとき}) \end{cases}$$
4. X を出力

第 1 回の講義で紹介した形と違うが，動きは同じ (で効率がよい)

マトロイドと貪欲アルゴリズム

非空な有限集合 E，E 上の独立集合族 $\mathcal{F}$

マトロイドに対する貪欲アルゴリズムの正当性

$\mathcal{F}$ がマトロイド $\Rightarrow$ 任意の重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して，貪欲アルゴリズムの出力は最大独立集合問題の最適解

つまり，Kruskal のアルゴリズムも正しい

証明 (1)

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ で，$w(e_1) \geq \cdots \geq w(e_n)$ であるとする

- 貪欲アルゴリズムの出力を B とする (B は $\mathcal{I}$ の基)
- 最適解の 1 つを B^* とする (B^* は $\mathcal{I}$ の基)
- 任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，次のように集合を定める

$$\begin{aligned} B_i &= B \cap \{e_1, \ldots, e_i\} \\ B_i^* &= B^* \cap \{e_1, \ldots, e_i\} \end{aligned}$$

- r を $\mathcal{I}$ の階数関数とするとき，次が成り立つ

1. $|B_i| = r(\{e_1, \ldots, e_i\})$ (なぜか？)
2. $|B_i^*| \leq r(\{e_1, \ldots, e_i\})$ (なぜか？)

- したがって，$|B_i| \geq |B_i^*|$

復習：マトロイドの階数関数

E 上のマトロイドの階数関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ とは？

- 任意の $X \in 2^E$ に対して $r(X) = \max\{|Y| \mid Y \subseteq X, Y \in \mathcal{I}\}$
- つまり，$r(X)$ は X の基の要素数

X の基とは？: 次を満たす集合 B_X

- $B_X \subseteq X$，かつ，$B_X \in \mathcal{I}$
- 任意の $e \in X - B_X$ に対して，$B_X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$

階数関数の性質 (第 3 回講義より)

- $X \in \mathcal{I}$ ならば，$r(X) = |X|$
- $X \subseteq Y$ ならば，$r(X) \leq r(Y)$ (単調性)

証明 (2)

確認

2 $|B_i^*| \leq r(\{e_1, \ldots, e_i\})$

- B_i^* の定義より，$B_i^* \subseteq B^*$
- $B^* \in \mathcal{I}$ なので，(I2) より，$B_i^* \in \mathcal{I}$
- 階数関数の性質より，$r(B_i^*) = |B_i^*|$
- $B_i^* \subseteq \{e_1, \ldots, e_i\}$ なので，単調性より，$r(B_i^*) \leq r(\{e_1, \ldots, e_i\})$
- したがって，$|B_i^*| = r(B_i^*) \leq r(\{e_1, \ldots, e_i\})$ □

証明 (3)

確認

1 $|B_i| = r(\{e_1, \ldots, e_i\})$

- B_i が $\{e_1, \ldots, e_i\}$ の基であることを示せばよい

- B_i の定義より，$B_i \subseteq \{e_1, \ldots, e_i\}$
- $B_i \subseteq B$ と $B \in \mathcal{I}$ と (I2) より，$B_i \in \mathcal{I}$
- 任意の $e_j \in \{e_1, \ldots, e_i\} - B_i$ を考える
- $B_i \cup \{e_j\} \in \mathcal{I}$ であるとすると，
  貪欲アルゴリズムの第 i 反復で B_i が得られることに矛盾
- したがって，$B_i \cup \{e_j\} \notin \mathcal{I}$
- つまり，B_i は $\{e_1, \ldots, e_i\}$ の基である

証明 (4)

したがって，$B_0 = B_0^* = \emptyset$, $w(e_{n+1}) = 0$ としたとき，次が成り立つ

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in B} w(e) &= \sum_{i=1}^{n} (|B_i| - |B_{i-1}|) w(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |B_i| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} |B_i^*| (w(e_i) - w(e_{i+1})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (|B_i^*| - |B_{i-1}^*|) w(e_i) \\
&= \sum_{e \in B^*} w(e)
\end{aligned}$$

すなわち，B も最適解である □

目次

貪欲アルゴリズムとマトロイド：必要性

非空な有限集合 E，E 上の独立集合族 $\mathcal{F}$

定理：マトロイドであることの必要性

任意の重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して貪欲アルゴリズムの出力が最適解
$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ はマトロイド

証明：対偶を示す
- $\mathcal{F}$ がマトロイドではないと仮定する

証明すること

ある重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して貪欲アルゴリズムは最適解を出力しない

- $\mathcal{F}$ は独立集合族なので，$\mathcal{F}$ は (I1), (I2) を満たす
- つまり，$\mathcal{F}$ は (I3) を満たさない
- すなわち，$|X| > |Y|$ を満たす $X, Y \in \mathcal{F}$ が存在して，
  任意の $e \in X - Y$ に対して $Y \cup \{e\} \notin \mathcal{F}$ となる

貪欲アルゴリズムとマトロイド：必要性 (続き)

- このとき，$k = |Y|$ として，次のように $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ を定義

$$w(e) = \begin{cases} k+2 & (e \in Y \text{ のとき}) \\ k+1 & (e \in X - Y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- B を貪欲アルゴリズムの出力とすると，$Y \subseteq B$
- つまり，B は $X - Y$ の要素をどれも含まない
- $\therefore \sum_{e \in B} w(e) = |Y|(k+2) = k(k+2)$
- 一方，$\sum_{e \in X} w(e) \geq |X|(k+1) \geq (|Y|+1)(k+1) = (k+1)(k+1)$
- $k(k+2) < (k+1)(k+1)$ なので，B は最適解ではない　□

目次

第 1 回講義のスライドから

非空な有限集合 E，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

定理

次の 2 つは同値
1. 任意の重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して，
   貪欲アルゴリズムが最適解を出力する
2. 独立集合族 $\mathcal{F}$ がマトロイドである

つまり，
- マトロイド (matroid) とは特殊な性質を持つ独立集合族
- マトロイドに対しては，貪欲アルゴリズムが必ず最適解を出力する

$\rightsquigarrow$ マトロイドはとても性質のよい独立集合族

今回，これを確かに証明した

今日のまとめ

グラフの最小全域木問題とマトロイドの関係を探る

- グラフの最小全域木問題 $\leftrightarrow$ マトロイドの最小基問題
- Kruskal のアルゴリズム $\leftrightarrow$ 貪欲アルゴリズム
- 貪欲アルゴリズムの正当性
- 「貪欲アルゴリズムの正当性」におけるマトロイドの必要性

次回

- 貪欲アルゴリズムの応用

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する $\leftarrow$ 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK