離散最適化基礎論 第 11 回
マトロイド交わり定理：アルゴリズム

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 1 月 22 日

最終更新：2016 年 8 月 23 日　12:58

スケジュール 前半

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

スケジュール 後半 (予定)

⋆	休講 (国内出張)	(12/11)
8	マトロイドに対する操作	(12/18)
9	マトロイドの交わり	(12/25)
⋆	冬季休業	(1/1)
10	マトロイド交わり定理	(1/8)
⋆	休講 (センター試験準備)	(1/15)
11	マトロイド交わり定理：アルゴリズム	(1/22)
12	最近のトピック	(1/29)
⋆	~~授業等調整日 (予備日)~~	(2/5)
⋆	期末試験	(2/12)

注意：予定の変更もありうる

期末試験

- 日時：2 月 12 日 (金) 4 限
- 教室：西 5 号館 214 教室
- 範囲：第 1 回講義のはじめ から 第 10 回講義のおわり まで (第 11 回と第 12 回は含まない)
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

最大共通独立集合問題に対する効率的アルゴリズムの設計

- 復習：マトロイド交わり定理
- 重要概念：増加道

目次

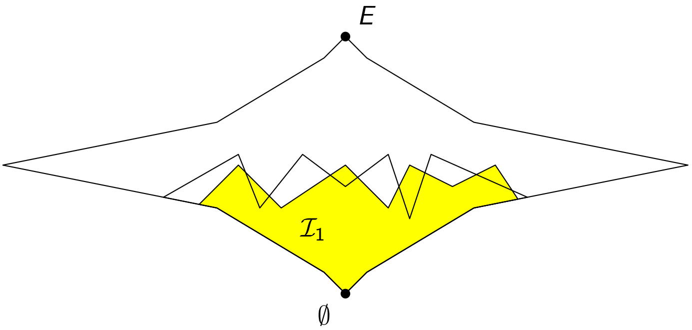
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



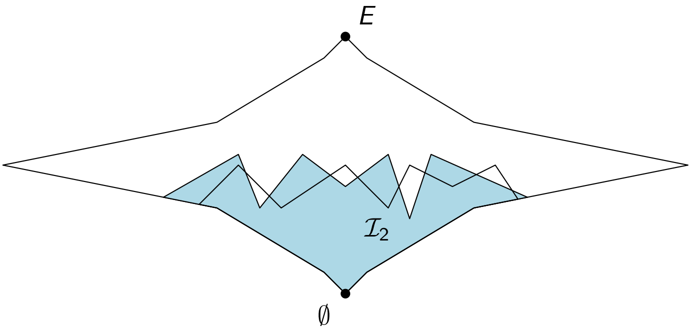
非空な有限集合 E，2つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



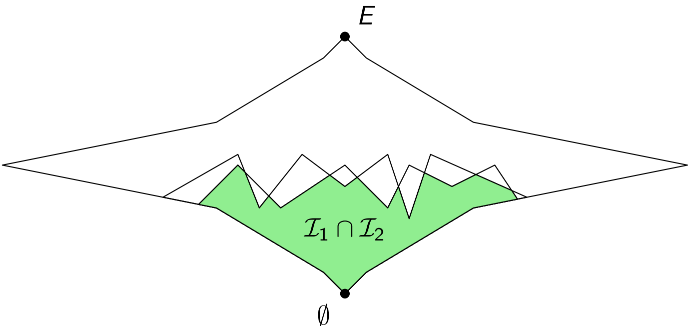
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

マトロイドの交わりの重要性 (1)

次の問題が多項式時間で解ける

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

(マトロイドの最大重み共通独立集合問題)

注意：貪欲アルゴリズムで解けるわけではない

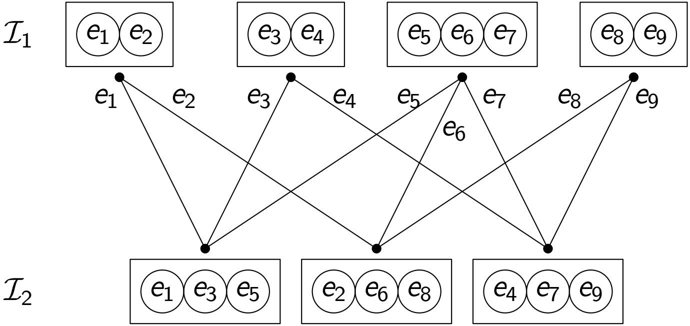
マトロイドの交わりの重要性 (2)

様々な問題をモデル化できる

- 例 1：二部グラフの最大マッチング問題
- 例 2：最小有向木問題

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



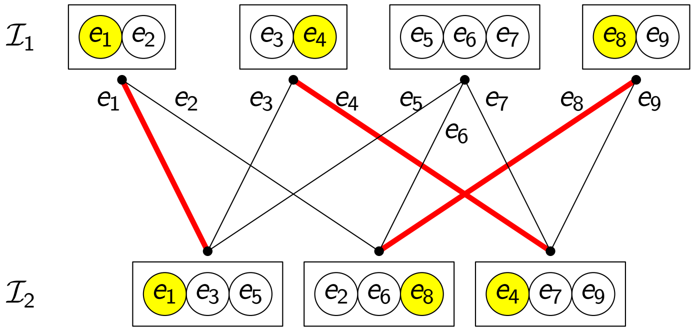
二部グラフ $G = (U, V; E)$ に対して，要素数最大のマッチングを求めたい

マッチングとは？ (復習)

辺部分集合で，任意の頂点に接続する辺の数が 1 以下であるもの

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



頂点 v に接続する辺の集合を $\delta(v)$ として，次のマトロイドを考える

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(u)| \leq 1 \ (\forall\ u \in U)\},\\ \mathcal{I}_2 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(v)| \leq 1 \ (\forall\ v \in V)\}\end{aligned}$$

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

考える問題：最大共通独立集合問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

今日の目標

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズムの設計と解析

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

別名：最大共通独立集合問題に対する強双対定理

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：重要性

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と $S \subseteq E$ が見つけられれば
X が $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の最大共通独立集合であることが分かる

マトロイド交わり定理：重要性

そのような X と S が必ず存在する

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

マトロイド交わり定理が
最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム設計の指針を与える

アルゴリズム設計指針

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. X が $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ の要素であるように「増加」させる
3. X を「増加」させられないとき，
   $|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす S を見つける

アルゴリズムが次回のテーマ

目次

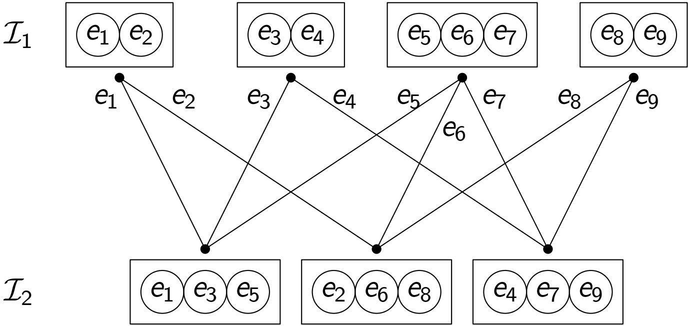
設定

- E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ とその階数関数 r_1, r_2
- $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

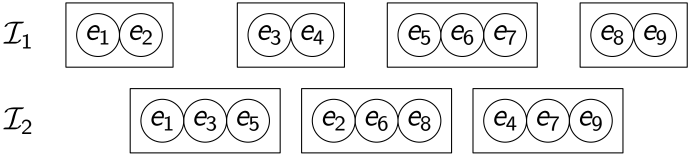
目標：次のいずれかを行う

1. $|X| < |Z|$ を満たす $Z \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ を見つける
2. $|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $S \subseteq E$ を見つける

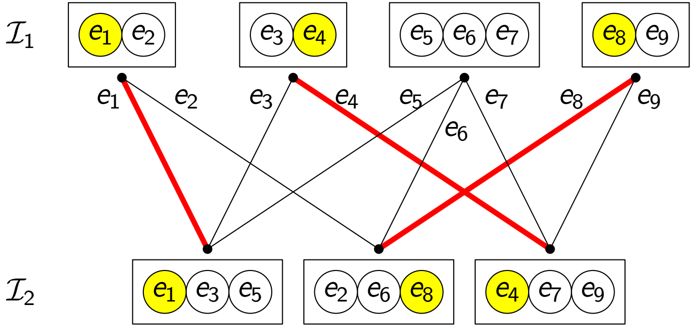
二部グラフにおける最大マッチングの例を使って説明



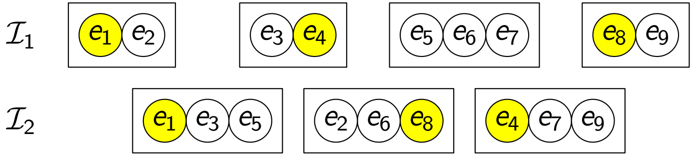
図は，次のように簡略化



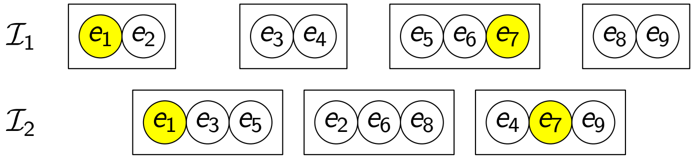
二部グラフにおける最大マッチングの例を使って説明



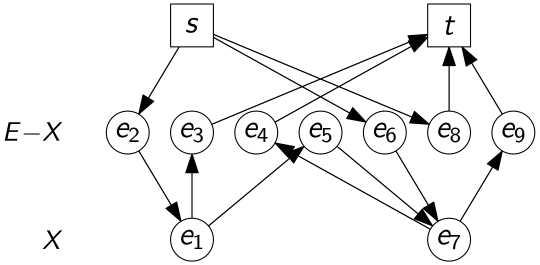
図は，次のように簡略化



アルゴリズム：基本アイディアの例 (2)

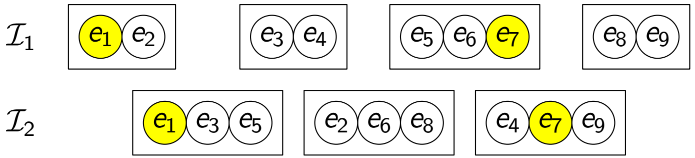


X を用いて，補助グラフ G_X を作成する

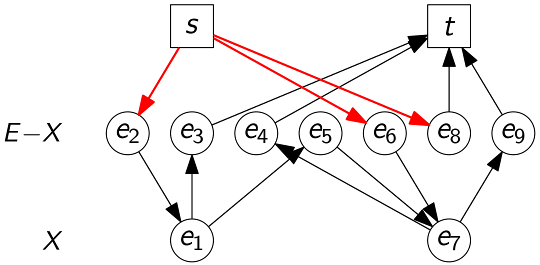


G_X の頂点集合は $E \cup \{s, t\}$ で，4 種類の有向辺が存在

アルゴリズム：基本アイディアの例 (2-1)



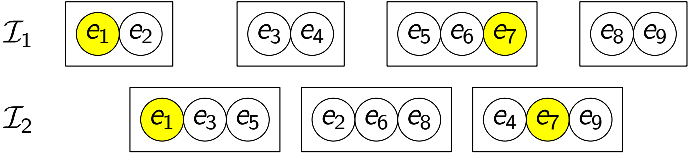
X を用いて，補助グラフ G_X を作成する



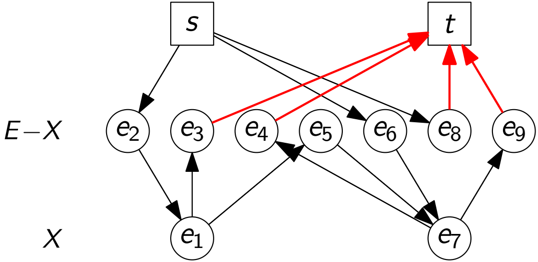
$e \in E - X$ に対して，

$$\text{有向辺}\,(s, e)\,\text{が存在} \Leftrightarrow X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2$$

アルゴリズム：基本アイディアの例 (2-2)



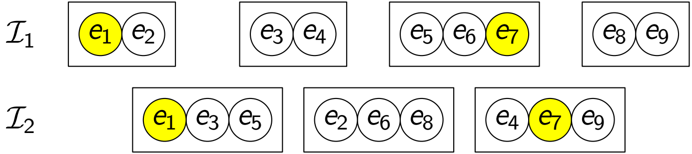
X を用いて，補助グラフ G_X を作成する



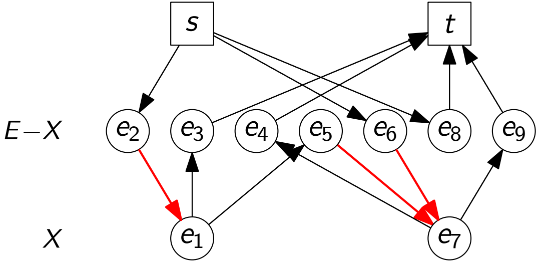
$e \in E - X$ に対して，

$$\text{有向辺 } (e, t) \text{ が存在} \Leftrightarrow X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1$$

アルゴリズム：基本アイディアの例 (2-3)

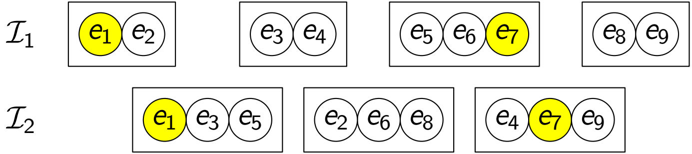


X を用いて，補助グラフ G_X を作成する

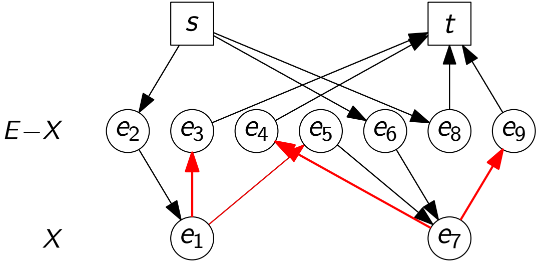


$e \in E-X, f \in X$ に対して，

$$\text{有向辺}\ (e, f)\ \text{が存在} \Leftrightarrow X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1,\ (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1$$



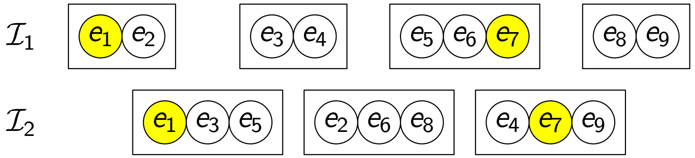
X を用いて，補助グラフ G_X を作成する



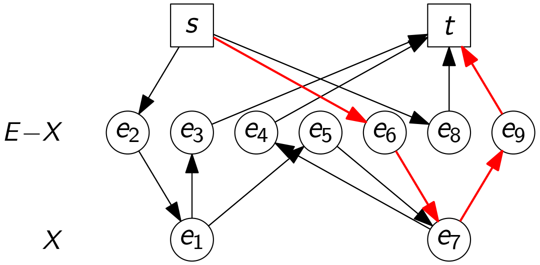
$e \in E - X, f \in X$ に対して，

$$\text{有向辺 } (f, e) \text{ が存在} \Leftrightarrow X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2,\ (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2$$

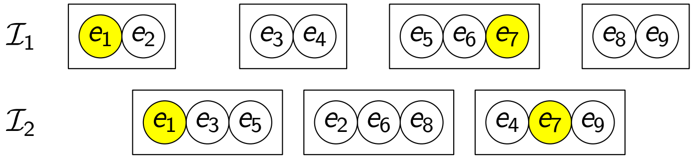
アルゴリズム：基本アイディアの例 (3)



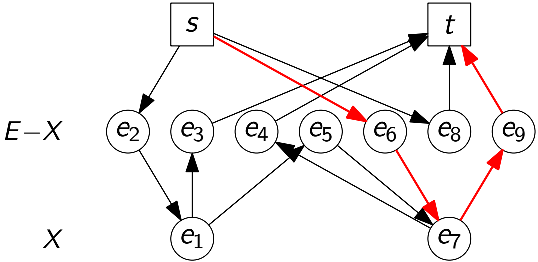
補助グラフ G_X にて，s から t へ至る有向道を見つける



この場合，$s \to e_6 \to e_7 \to e_9 \to t$

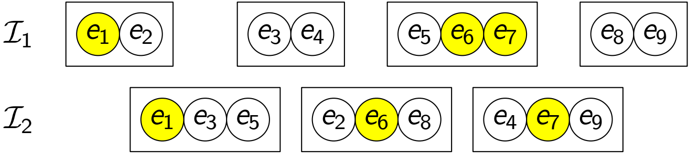


見つけた有向道に沿って，X を「増加」させる

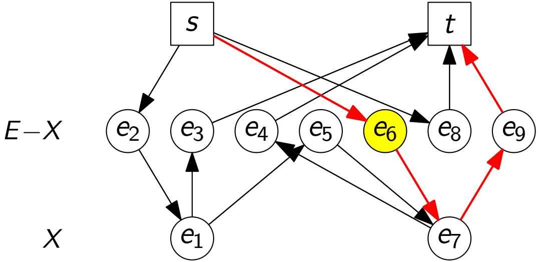


これで，X より要素数が 1 だけ大きい共通独立集合 Z が見つかった

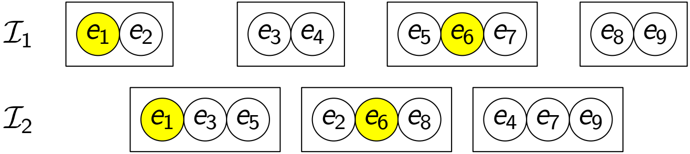
アルゴリズム：基本アイディアの例 (4)



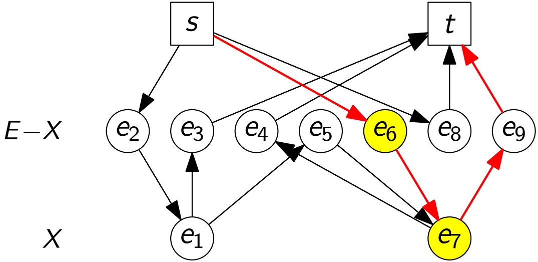
見つけた有向道に沿って，X を「増加」させる



これで，X より要素数が 1 だけ大きい共通独立集合 Z が見つかった

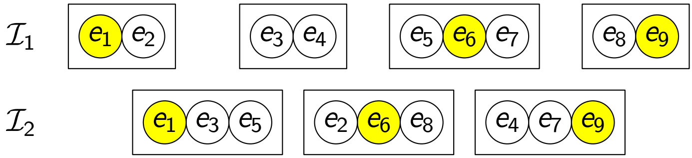


見つけた有向道に沿って，X を「増加」させる

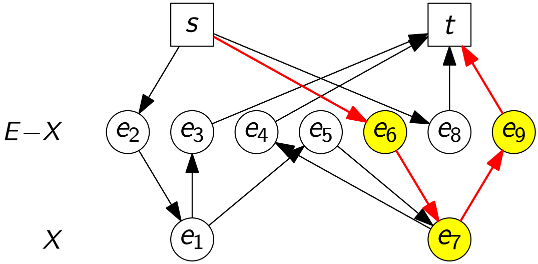


これで，X より要素数が 1 だけ大きい共通独立集合 Z が見つかった

アルゴリズム：基本アイディアの例 (4)

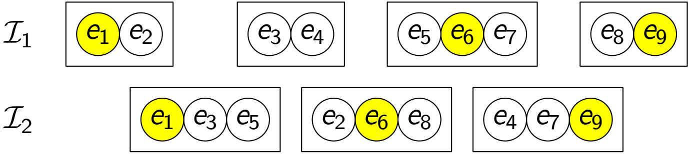


見つけた有向道に沿って，X を「増加」させる

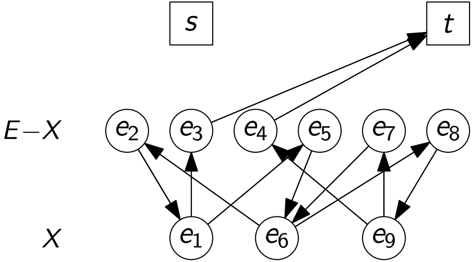


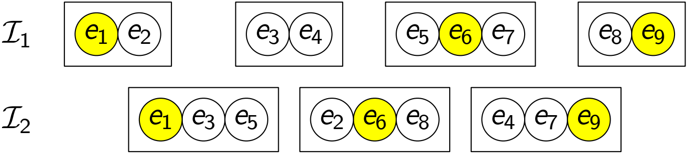
これで，X より要素数が 1 だけ大きい共通独立集合 Z が見つかった

アルゴリズム：基本アイディアの例 (5)

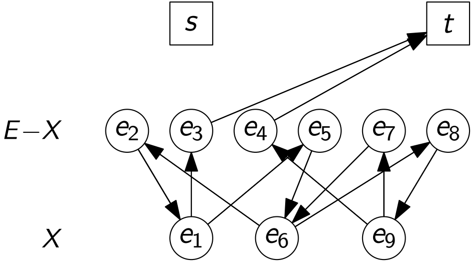


先ほど得られた Z を新しい X として，補助グラフ G_X を作成する





補助グラフ G_X にて，s から t へ至る有向道を見つける



しかし，見つからない $\rightsquigarrow$ アルゴリズム終了

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る <u>最短路</u> を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

補助グラフの辺集合は以下のように定義された

$$
\begin{aligned}
&\{(s,e) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2\} \cup \\
&\{(e,t) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\
&\{(e,f) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\
&\{(f,e) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2\}
\end{aligned}
$$

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る 最短路 を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

見つかった最短路が $s \to e_1 \to f_1 \to \cdots \to e_m \to f_m \to e_{m+1} \to t$ のとき，
X を増加させてできる集合は

$$(X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\}$$

これは X より要素数が 1 だけ大きい

目次

1. マトロイド交わり定理：復習
2. 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム
3. 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明 — 準備
4. 最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム：正当性の証明
5. 今日のまとめ

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

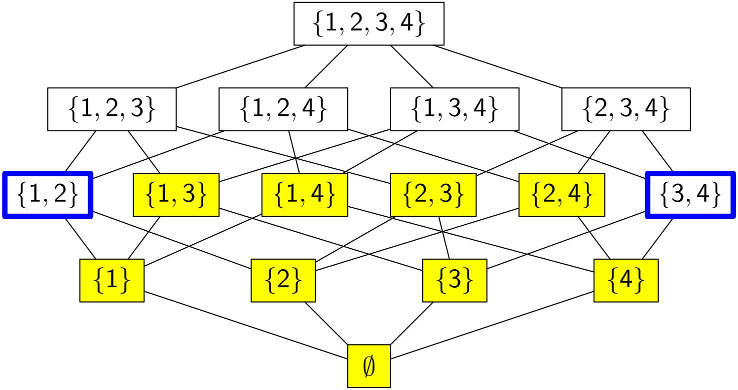
$$\text{任意の } e \in C \text{ に対して，} \quad C - \{e\} \in \mathcal{I}$$

別の言い方：サーキットとは極小な従属集合

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

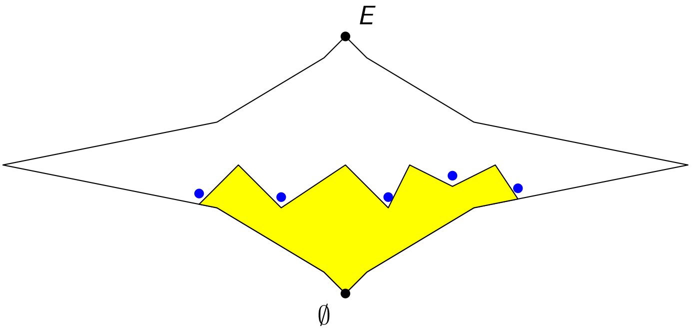
任意の $e \in C$ に対して，$C - \{e\} \in \mathcal{I}$



マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

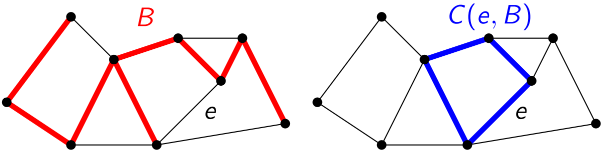
任意の $e \in C$ に対して， $C - \{e\} \in \mathcal{I}$



非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

サーキットの性質 (復習)

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む



そのサーキットを $C(e, X)$ と書くことにする　(注：$e \in C(e, X)$)

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$, $X \in \mathcal{I}$
$e \in E - X, f \in X$

補題 1：サーキットを使った交換

$X \cup \{e\} \notin \mathcal{I},\ f \in C(e, X) \quad \Rightarrow \quad (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}$

<u>証明</u>：$e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}, f \in C(e, X)$ と仮定

- $f \in C(e, X)$ であり $C(e, X)$ はサーキットなので，$C(e, X) - \{f\} \in \mathcal{I}$
- 階数関数の劣モジュラ性より

$$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) + r(C(e, X)) \geq r(X \cup \{e\}) + r(C(e, X) - \{f\})$$

サーキットを使った交換 (続き)

- ここで，次を確認
  - $r(C(e,X)) \leq |C(e,X)| - 1 \qquad (\because C(e,X) \notin \mathcal{I})$
  - $r(C(e,X) - \{f\}) = |C(e,X)| - 1 \quad (\because C(e,X) - \{f\} \in \mathcal{I}, f \in C(e,X))$
  - $r(X \cup \{e\}) = |X| \qquad (\because X \in \mathcal{I}, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I})$
- ゆえに，

$$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) \geq |X| - (|C(e,X)| - 1) + (|C(e,X)| - 1) = |X|$$

- 一方で，$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) \leq |(X \cup \{e\}) - \{f\}| = |X|$ なので，

$$r((X \cup \{e\}) - \{f\}) = |X|$$

- すなわち，$X \cup \{e\} - \{f\} \in \mathcal{I}$ $\square$

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る <u>最短路</u> を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

補助グラフの辺集合は以下のように定義された

$$
\begin{aligned}
&\{(s,e) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2\} \cup \\
&\{(e,t) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\
&\{(e,f) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1\} \cup \\
&\{(f,e) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2\}
\end{aligned}
$$

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る 最短路 を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

証明したいこと

1. 増加させた X に対して，$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
2. 出力された X が最大共通独立集合であること

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$，$\mathcal{I}$ の階数関数 r，$\mathcal{I}$ のサーキット C

補題 2

$f \in C \subseteq A \quad \Rightarrow \quad r(A - \{f\}) = r(A)$

証明：

- C はサーキットなので，$C - \{f\} \in \mathcal{I}$
- つまり，$C - \{f\}$ の基は $C - \{f\}$
- $C - \{f\} \subseteq A - \{f\}$ なので，
  $A - \{f\}$ の基で $C - \{f\}$ を含むものが存在する　　(演習問題 3.10)
- それを B とする
- $\boxed{\text{証明すること}}$：B が A の基でもあること
- これが証明できれば，$r(A - \{f\}) = |B| = r(A)$ が導かれる

補題 2 (続き)

証明 (続き)：

- $C - \{f\} \subseteq B$ なので，$C \subseteq B \cup \{f\}$
- C はサーキットなので，$B \cup \{f\} \notin \mathcal{I}$
- B は $A - \{f\}$ の基なので，任意の $e \in (A - \{f\}) - B$ に対して $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$
- すなわち，任意の $e \in A - B$ に対して $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$
- つまり，B は A の基 $\square$

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る <u>最短路</u> を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

証明したいこと

1. 増加させた X に対して，$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
2. 出力された X が最大共通独立集合であること

見つかった最短路が $s \to e_1 \to f_1 \to \cdots \to e_m \to f_m \to e_{m+1} \to t$ であるとする

道が存在するとき

$(X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

証明：$(X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} \in \mathcal{I}_1$ を証明する
($(X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} \in \mathcal{I}_2$ は演習問題)

- $T = X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}$ とする
- $i \in \{m+1, \ldots, 1\}$ に対して，$T_i = T - \{f_m, \ldots, f_i\}$ とする
- このとき，

$$\begin{aligned} T_{m+1} = T &= X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}, \\ T_1 &= (X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} \end{aligned}$$

- (e_{m+1}, t) は G_X の辺なので，$X \cup \{e_{m+1}\} \in \mathcal{I}_1$
- $X \cup \{e_{m+1}\} \subseteq T$ なので，$r_1(T) \geq r_1(X \cup \{e_{m+1}\}) = |X| + 1$

- (e_i, f_i) が G_X の辺なので，$X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I}_1$
- つまり，$X \cup \{e_i\}$ は $\mathcal{I}_1$ のサーキットを含む (それを C とする)

観察

$C \subseteq T_{i+1}$

<u>観察の証明</u>：T_{i+1} が C を含まないとする

- このとき，ある $j \in \{i+1, \ldots, m\}$ に対して，$f_j \in C$ となる
- 補題 1 より，$(X \cup \{e_i\}) - \{f_j\} \in \mathcal{I}_1$
- つまり，(e_i, f_j) は G_X の辺である
- これは <u>選んだ道の最小性</u> に矛盾 □

ここまでのまとめ

- C は $X \cup \{e_i\}$ に含まれる $\mathcal{I}_1$ のサーキット
- $C \subseteq T_{i+1}$

- (e_i, f_i) が G_X の辺なので，$(X \cup \{e_i\}) - \{f_i\} \in \mathcal{I}_1$
- $\therefore f_i \in C$
- 補題 2 より，$r_1(T_{i+1} - \{f_i\}) = r_1(T_{i+1})$
- 定義より，$T_{i+1} - \{f_i\} = T_i$
- $\therefore r_1(T_i) = r_1(T_{i+1})$
- $\therefore r_1(T) = r_1(T_{m+1}) = \cdots = r_1(T_1) \leq |X| + 1$
- $r_1(T) \geq |X| + 1$ なので，$r_1(T_1) = |X| + 1$ (つまり，$T_1 \in \mathcal{I}_1$)
- $\therefore (X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} = T_1 \in \mathcal{I}_1$ □

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る 最短路 を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

証明したいこと

1. 増加させた X に対して，$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
2. 出力された X が最大共通独立集合であること

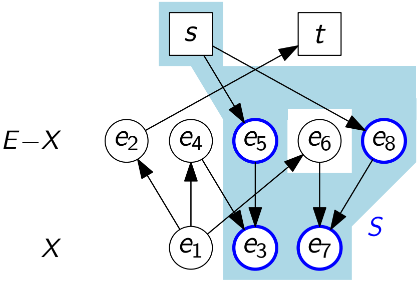
ここで，マトロイド交わり定理を利用する

G_X において，s から到達できる E の要素の集合を S とする

証明したいこと

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$

マトロイド交わり定理より，X が最大共通独立集合であると分かる



G_X において，s から到達できる E の要素の集合を S とする

証明したいこと

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$

マトロイド交わり定理より，X が最大共通独立集合であると分かる

そのために証明したいこと

1. $\mathcal{I}_1$ において，$X \cap S$ が S の基であること
2. $\mathcal{I}_2$ において，$X \cap (E - S)$ が $E - S$ の基であること

これが証明できれば，$r_1(S) = |X \cap S|$, $r_2(E - S) = |X \cap (E - S)|$ となるので，

$$|X| = |X \cap S| + |X \cap (E - S)| = r_1(S) + r_2(E - S)$$

となり，全体の証明が終わる

証明すること

1. $\mathcal{I}_1$ において，$X \cap S$ が S の基であること

証明：$S - (X \cap S) = S \cap (E - X)$ に注意

- 任意の $e \in S \cap (E - X)$ を考える
- このとき，(e, t) は G_X の辺ではない
  ($\because$ 辺であるとすると，s から t へ至る道が存在してしまう)
- つまり，$X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1$
- $\therefore X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}_1$ のサーキット $C_1(e, X)$ を含む
- 任意の $f \in X - S$ を考える
- このとき，(e, f) は G_X の辺ではない
  ($\because$ 辺であるとすると，s から f へ至る道が存在し，$f \notin S$ に矛盾)

証明すること

1. $\mathcal{I}_1$ において，$X \cap S$ が S の基であること

証明 (続き)：

- 任意の $e \in S \cap (E - X)$ を考える
- $\cdots$
- つまり，$(X \cup \{e\}) - \{f\} \notin \mathcal{I}_1$
- $\therefore (X \cup \{e\}) - \{f\}$ も $\mathcal{I}_1$ のサーキットを含む
- $(X \cup \{e\}) - \{f\} \subseteq X \cup \{e\}$ なので，そのサーキットは $C_1(e, X)$
- $\therefore (X \cup \{e\}) - (X - S)$ は $C_1(e, X)$ を含む
- $(X \cup \{e\}) - (X - S) = (X \cap S) \cup \{e\}$ であり，つまり，$(X \cap S) \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1$
- したがって，$\mathcal{I}_1$ において，$X \cap S$ は S の基 $\square$

証明すること

2. $\mathcal{I}_2$ において，$X \cap (E - S)$ が $E - S$ の基であること

証明は前のページと同様なので，演習問題

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る 最短路 を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

証明したこと

1. 増加させた X に対して，$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ が成り立つこと
2. 出力された X が最大共通独立集合であること

つまり，このアルゴリズムは正しい

最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$ (注：$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$)
2. 以下を繰り返し
   1. 補助グラフ G_X を作成する
   2. G_X において，s から t へ至る 最短路 を見つける
   3. 存在しなかったら，反復を抜ける
      存在したら，その最短路に沿って X を増加させる
3. X を出力

「$A \in \mathcal{I}_1$」や「$A \in \mathcal{I}_2$」という判定に γ 時間かかるとすると

- 補助グラフの作成：$O(|E|^2\gamma)$
- 最短路の計算：$O(|E|^2)$ (幅優先探索)
- 反復回数：$O(|E|)$

つまり，計算量は $O(|E|^3\gamma)$

目次

今日の目標

マトロイド交わり定理を理解し，使えるようになる

- 重要概念：弱双対性，強双対性
- 重要概念：最適性の保証

次回の予告

- マトロイド交わり問題に対する効率的アルゴリズム
- マトロイドの合併に対する効率的アルゴリズム

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次