離散最適化基礎論 第 10 回
マトロイド交わり定理

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 1 月 8 日

最終更新：2016 年 1 月 14 日　08:53

スケジュール 前半

⋆	休講 (卒研準備発表会)	(10/2)
1	組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割	(10/9)
⋆	休講 (海外出張)	(10/16)
2	マトロイドの定義と例	(10/23)
3	マトロイドの基と階数関数	(10/30)
4	グラフとマトロイド	(11/6)
5	マトロイドとグラフの全域木	(11/13)
⋆	休講 (調布祭)	(11/20)
6	マトロイドに対する貪欲アルゴリズム	(11/27)
7	マトロイドのサーキット	(12/4)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ ~~授業等調整日 (予備日)~~ (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12)

注意：予定の変更もありうる

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

マトロイド交わり定理を理解し，使えるようになる

- 重要概念：弱双対性，強双対性
- 重要概念：最適性の保証

目次

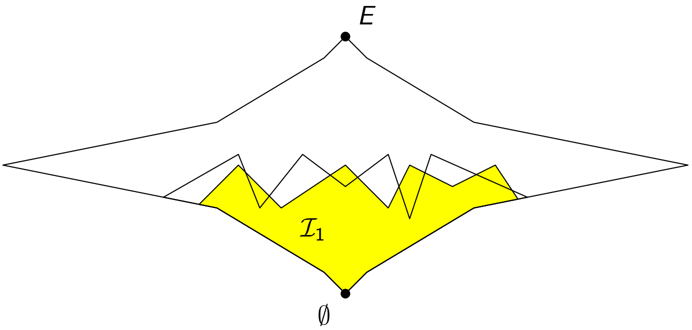
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



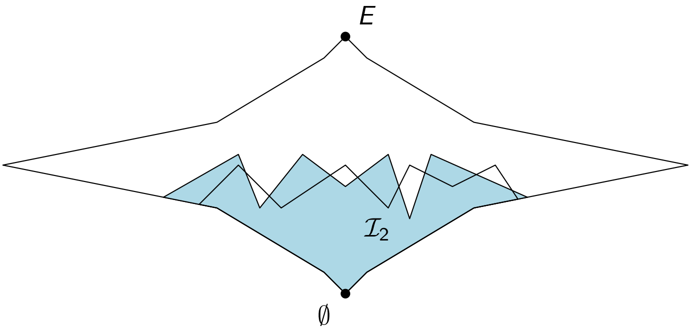
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



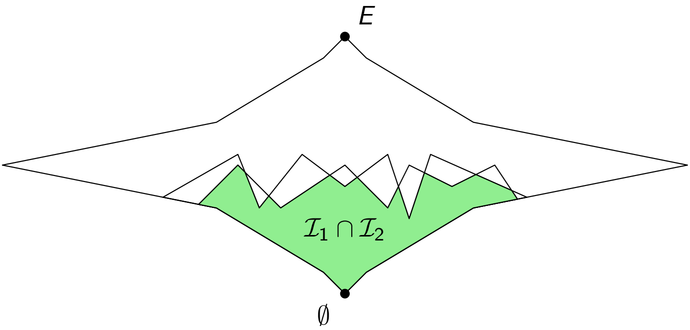
非空な有限集合 E，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの交わり (交叉，intersection) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の**交わり**とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{X \mid X \in \mathcal{I}_1, X \in \mathcal{I}_2\}$$

イメージ図



マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

マトロイドの交わりの重要性 (1)

次の問題が多項式時間で解ける

$$\begin{array}{rl} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

(マトロイドの最大重み共通独立集合問題)

注意：貪欲アルゴリズムで解けるわけではない

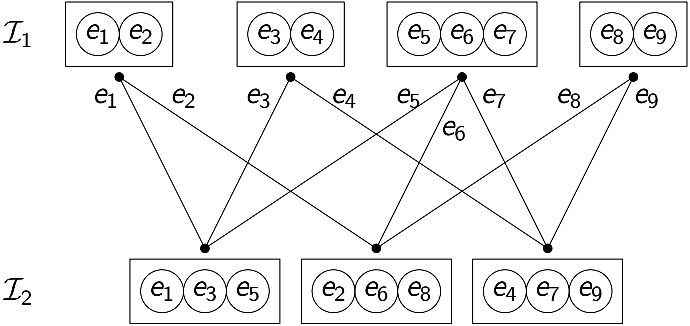
マトロイドの交わりの重要性 (2)

様々な問題をモデル化できる

- 例 1：二部グラフの最大マッチング問題
- 例 2：最小有向木問題

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



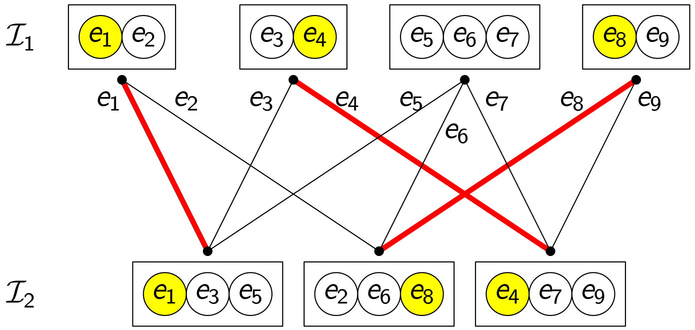
二部グラフ $G = (U, V; E)$ に対して，要素数最大のマッチングを求めたい

マッチングとは？ (復習)

辺部分集合で，任意の頂点に接続する辺の数が 1 以下であるもの

二部グラフの最大マッチング問題は

分割マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる



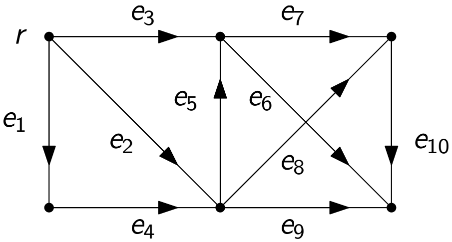
頂点 v に接続する辺の集合を $\delta(v)$ として，次のマトロイドを考える

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(u)| \leq 1 \ (\forall\ u \in U)\}, \\
\mathcal{I}_2 &= \{X \subseteq E \mid |X \cap \delta(v)| \leq 1 \ (\forall\ v \in V)\}
\end{aligned}
$$

最小有向木問題は

閉路マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる

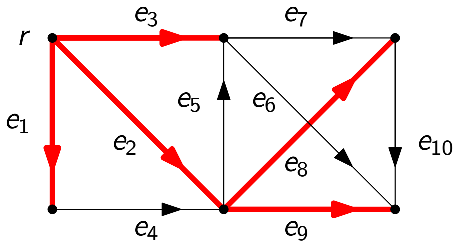
考えるのは有向グラフ



最小有向木問題は

閉路マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる

頂点 r を根とする有向木とは，
r から各頂点へ至る有向道がちょうど 1 つ存在するような部分グラフ

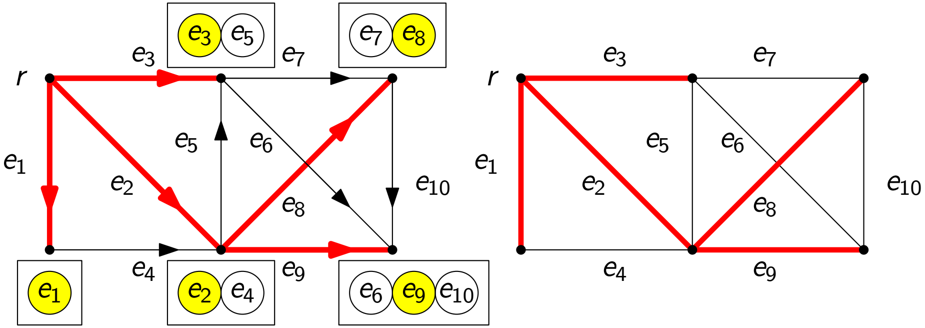


有向木：arborescence, out-tree, branching

最小有向木問題は

閉路マトロイドと分割マトロイドの交わりとしてモデル化できる

考えるマトロイドの 1 つは，
有向グラフの向きを無視してできる無向グラフの閉路マトロイド



もう 1 つは「r 以外の各頂点に入る弧数が 1 以下」という分割マトロイド

目次

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

考える問題：最大共通独立集合問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & |X| \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \end{array}$$

この問題は多項式時間で解けるが，
なぜ解けるのか，ということから考える

弱双対性

- $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする
- このとき，任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| = |X \cap S| + |X \cap (E - S)|$$

弱双対性

- $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする
- このとき，任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap S| + |X \cap (E - S)| \\ &= r_1(X \cap S) + r_2(X \cap (E - S)) \qquad \text{((I2) と階数関数の性質)} \end{aligned}$$

- $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする
- このとき，任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|X| &= |X \cap S| + |X \cap (E - S)| \\
&= r_1(X \cap S) + r_2(X \cap (E - S)) && \text{((I2) と階数関数の性質)} \\
&\leq r_1(S) + r_2(E - S) && \text{(階数関数の単調性)}
\end{aligned}
$$

- $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする
- このとき，任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|X| &= |X \cap S| + |X \cap (E - S)| \\
&= r_1(X \cap S) + r_2(X \cap (E - S)) && \text{((I2) と階数関数の性質)} \\
&\leq r_1(S) + r_2(E - S) && \text{(階数関数の単調性)}
\end{aligned}
$$

すなわち，以下が成り立つ

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理

任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理

任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理

任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：帰結

任意の $S \subseteq E$ に対して

$$\mathcal{I}_1 \text{ と } \mathcal{I}_2 \text{ の最大共通独立集合の要素数} \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

他の表現：任意の $S \subseteq E$ に対して

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理

任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：帰結

任意の $S \subseteq E$ に対して

$$\mathcal{I}_1 \text{ と } \mathcal{I}_2 \text{ の最大共通独立集合の要素数} \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

他の表現：任意の $S \subseteq E$ に対して

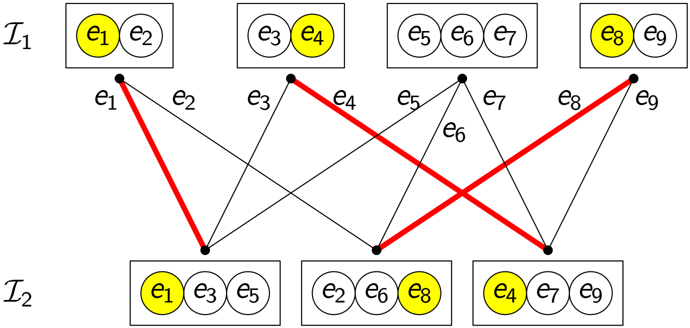
$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：帰結 (2)

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \leq \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

「帰結 (2)」の式を弱双対定理と呼ぶことも多い

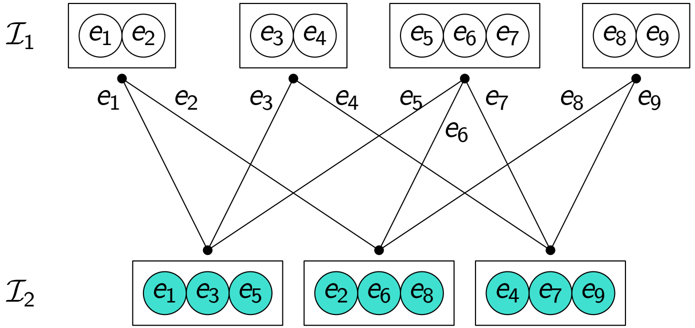
最大共通独立集合問題として定式化された最大マッチング問題において



$X = \{e_1, e_4, e_8\}$ とすると，$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ なので，

最大共通独立集合の要素数 $\geq |X| = 3$

最大共通独立集合問題として定式化された最大マッチング問題において



$S = \emptyset$ とすると，

$$\text{最大共通独立集合の要素数} \leq r_1(S) + r_2(E - S) = 0 + 3 = 3$$

非空な有限集合 E，集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$，
自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 0$

分割マトロイド

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid 任意の\ i \in \{1, \ldots, k\}\ に対して，\ |X \cap E_i| \leq r_i\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

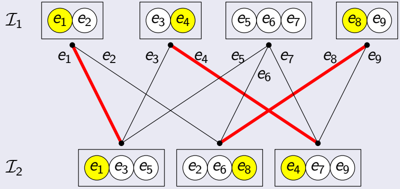
上で定義された分割マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数を r とすると

$$r(X) = \sum_{i=1}^{k} \min\{|X \cap E_i|, r_i\}$$

(演習問題)

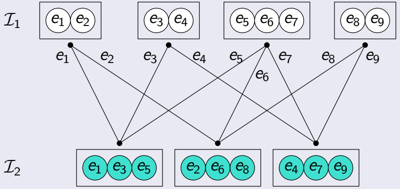
最大共通独立集合問題として定式化された最大マッチング問題において

下界



最大共通独立集合の要素数 ≥ 3

上界



最大共通独立集合の要素数 ≤ 3

したがって

最大共通独立集合の要素数 $=$ 3

$X = \{e_1, e_4, e_8\}$ という共通独立集合の最大性を $S = \emptyset$ が保証する

最適性の保証

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理

任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| \leq r_1(S) + r_2(E - S)$$

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：重要性

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と $S \subseteq E$ が見つけられれば
X が $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の最大共通独立集合であることが分かる

- S によって，X の最適性が保証できる
- アルゴリズムを設計するとき，X と同時に S も見つければよさそう

注意：「見つけられれば」という話は，見つけられないと意味がない
(そもそも，そのような X と S が存在しないかもしれない)

目次

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

別名：最大共通独立集合問題に対する強双対定理

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：重要性 (再掲)

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と $S \subseteq E$ が見つけられれば
X が $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の最大共通独立集合であることが分かる

マトロイド交わり定理：重要性

そのような X と S が必ず存在する

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

証明：「$\leq$」は弱双対定理として証明済みなので,「$\geq$」を証明する

- 証明の方針：$|E|$ に関する数学的帰納法
- $n = |E|$ とおく

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

証明：「$\leq$」は弱双対定理として証明済みなので,「$\geq$」を証明する

- 証明の方針：$|E|$ に関する数学的帰納法
- $n = |E|$ とおく

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階)

- $E = \{e\}$ とする

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

証明：「$\leq$」は弱双対定理として証明済みなので，「$\geq$」を証明する

- 証明の方針：$|E|$ に関する数学的帰納法
- $n = |E|$ とおく

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階)

- $E = \{e\}$ とする
- $\mathcal{I}_1$ として可能なものは 2 種類だけ ($\mathcal{I}_2$ も同様)

$$\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \quad \text{または} \quad \mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}$$

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

証明：「$\leq$」は弱双対定理として証明済みなので，「$\geq$」を証明する

- 証明の方針：$|E|$ に関する数学的帰納法
- $n = |E|$ とおく

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階)

- $E = \{e\}$ とする
- $\mathcal{I}_1$ として可能なものは 2 種類だけ ($\mathcal{I}_2$ も同様)

$$\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \qquad \text{または} \qquad \mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}$$

- $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$ のとき，任意の $X \subseteq E$ に対して $r_1(X) = 0$

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

証明：「$\leq$」は弱双対定理として証明済みなので,「$\geq$」を証明する

- 証明の方針：$|E|$ に関する数学的帰納法
- $n = |E|$ とおく

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階)

- $E = \{e\}$ とする
- $\mathcal{I}_1$ として可能なものは 2 種類だけ ($\mathcal{I}_2$ も同様)

$$\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \qquad \text{または} \qquad \mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}$$

- $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$ のとき，任意の $X \subseteq E$ に対して $r_1(X) = 0$
- $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき，任意の $X \subseteq E$ に対して $r_1(X) = |X|$

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき

2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

マトロイド交わり定理：証明 (2)

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}$, $\mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = r_1(\{e\}) + r_2(\emptyset) = 0$
3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = r_1(\{e\}) + r_2(\emptyset) = 0$
3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 1$

$\boxed{n = 1 \text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = r_1(\{e\}) + r_2(\emptyset) = 0$
3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 1$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 1$

$\boxed{n=1\text{ のとき}}$ (基底段階) 続き：場合分け

1. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 0$
2. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = r_1(\{e\}) + r_2(\emptyset) = 0$
3. $\mathcal{I}_1 = \{\emptyset, \{e\}\}, \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ のとき
   - $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset, \{e\}\}$ で，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 1$
   - 一方，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} = 1$

したがって，どの場合でも，

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

が成立

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える

マトロイド交わり定理：証明 (3)

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる　(なぜか？)

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる　(なぜか？)
- したがって，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる (なぜか？)
- したがって，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
- 一方で，$S = \{e \mid e \in E, \{e\} \notin \mathcal{I}_1\}$ とすると，
  任意の $e \in E - S$ に対して，$\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ が成り立つ

$\boxed{n = \ell \geq 2\text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる (なぜか？)
- したがって，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
- 一方で，$S = \{e \mid e \in E, \{e\} \notin \mathcal{I}_1\}$ とすると，
  任意の $e \in E - S$ に対して，$\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ が成り立つ
- つまり，$\mathcal{I}_1$ における S の基は $\emptyset$ であり，$\mathcal{I}_2$ における $E - S$ の基は $\emptyset$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる　(なぜか？)
- したがって，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
- 一方で，$S = \{e \mid e \in E, \{e\} \notin \mathcal{I}_1\}$ とすると，
  任意の $e \in E - S$ に対して，$\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ が成り立つ
- つまり，$\mathcal{I}_1$ における S の基は $\emptyset$ であり，$\mathcal{I}_2$ における $E - S$ の基は $\emptyset$
- したがって，$r_1(S) = 0, r_2(E - S) = 0$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる　(なぜか？)
- したがって，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
- 一方で，$S = \{e \mid e \in E, \{e\} \notin \mathcal{I}_1\}$ とすると，
  任意の $e \in E - S$ に対して，$\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ が成り立つ
- つまり，$\mathcal{I}_1$ における S の基は $\emptyset$ であり，$\mathcal{I}_2$ における $E - S$ の基は $\emptyset$
- したがって，$r_1(S) = 0, r_2(E - S) = 0$
- よって，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} \leq 0$ となる

$\boxed{n = \ell \geq 2\text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < \ell$ のときに成立すると仮定

- 任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすときを考える
- このとき，$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \{\emptyset\}$ となる　　　　(なぜか？)
- したがって，$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = 0$
- 一方で，$S = \{e \mid e \in E, \{e\} \notin \mathcal{I}_1\}$ とすると，
  任意の $e \in E - S$ に対して，$\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ が成り立つ
- つまり，$\mathcal{I}_1$ における S の基は $\emptyset$ であり，$\mathcal{I}_2$ における $E - S$ の基は $\emptyset$
- したがって，$r_1(S) = 0, r_2(E - S) = 0$
- よって，$\min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} \leq 0$ となる

この場合，

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \geq \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

が成立

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < k$ のときに成立すると仮定

- ある $e \in E$ に対して，$\{e\} \in \mathcal{I}_1$ かつ $\{e\} \in \mathcal{I}_2$ であるときを考える

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < k$ のときに成立すると仮定

- ある $e \in E$ に対して，$\{e\} \in \mathcal{I}_1$ かつ $\{e\} \in \mathcal{I}_2$ であるときを考える
- $k = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$ とする

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < k$ のときに成立すると仮定

- ある $e \in E$ に対して，$\{e\} \in \mathcal{I}_1$ かつ $\{e\} \in \mathcal{I}_2$ であるときを考える
- $k = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$ とする
- $\boxed{\text{背理法}}$：任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ に対して，$|X| < k$ であると仮定

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：$n < k$ のときに成立すると仮定

- ある $e \in E$ に対して，$\{e\} \in \mathcal{I}_1$ かつ $\{e\} \in \mathcal{I}_2$ であるときを考える
- $k = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$ とする
- $\boxed{\text{背理法}}$：任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ に対して，$|X| < k$ であると仮定
- このとき，除去 $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\}$ と縮約 $\mathcal{I}_1/\{e\}, \mathcal{I}_2/\{e\}$ を考える

マトロイドの除去 (復習)

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と $e \in E$ に対して

$$\mathcal{I} \setminus \{e\} = \{X \mid X \in \mathcal{I}, X \subseteq E - \{e\}\}$$

マトロイドの縮約 (復習)

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と $e \in E$ (ただし，$\{e\} \in \mathcal{I}$) に対して

$$\mathcal{I}/\{e\} = \{X \mid X \cup \{e\} \in \mathcal{I}, X \subseteq E - \{e\}\}$$

$\mathcal{I} \setminus \{e\}$ と $\mathcal{I}/\{e\}$ は $E - \{e\}$ 上のマトロイド

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (1)

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_2$ なので，仮定より，

$$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \leq k - 1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (1)

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_2$ なので，仮定より，

$$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \leq k - 1$$

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\}$ の階数関数を r'_1, r'_2 とすると，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned} & \max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \\ = \ & \min\{r'_1(S') + r'_2((E - \{e\}) - S') \mid S' \subseteq E - \{e\}\} \end{aligned}$$

$\boxed{n = \ell \geq 2\text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (1)

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_2$ なので，仮定より，

$$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \leq k - 1$$

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\}$ の階数関数を r'_1, r'_2 とすると，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned} & \max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \\ = \ & \min\{r'_1(S') + r'_2((E - \{e\}) - S') \mid S' \subseteq E - \{e\}\} \end{aligned}$$

- すなわち，ある $S' \subseteq E - \{e\}$ が存在して，

$$r'_1(S') + r'_2((E - \{e\}) - S') \leq k - 1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2\text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (1)

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\} \subseteq \mathcal{I}_2$ なので，仮定より，

$$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \leq k - 1$$

- $\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}, \mathcal{I}_2 \setminus \{e\}$ の階数関数を r'_1, r'_2 とすると，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned} & \max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1 \setminus \{e\}) \cap (\mathcal{I}_2 \setminus \{e\})\} \\ = \; & \min\{r'_1(S') + r'_2((E - \{e\}) - S') \mid S' \subseteq E - \{e\}\} \end{aligned}$$

- すなわち，ある $S' \subseteq E - \{e\}$ が存在して，

$$r'_1(S') + r'_2((E - \{e\}) - S') \leq k - 1$$

- 除去の階数関数の公式 (第 8 回講義スライド 19 ページ) より

$$r_1(S') + r_2((E - \{e\}) - S') \leq k - 1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (2)

- 任意の $X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})$ に対して，$X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$\boxed{n = \ell \geq 2\ のとき}$ (帰納段階)：続き (2)

- 任意の $X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})$ に対して，$X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$
- $\therefore$ 仮定より，$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \leq k - 2$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (2)

- 任意の $X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})$ に対して，$X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$
- $\therefore$ 仮定より，$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \leq k - 2$
- $\mathcal{I}_1/\{e\}, \mathcal{I}_2/\{e\}$ の階数関数を r_1'', r_2'' とすると，帰納法の仮定より，

$$
\begin{aligned}
& \max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \\
= \ & \min\{r_1''(S'') + r_2''((E - \{e\}) - S'') \mid S'' \subseteq E - \{e\}\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (2)

- 任意の $X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})$ に対して，$X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$
- $\therefore$ 仮定より，$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \leq k-2$
- $\mathcal{I}_1/\{e\}, \mathcal{I}_2/\{e\}$ の階数関数を r_1'', r_2'' とすると，帰納法の仮定より，

$$
\begin{aligned}
& \max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \\
= \; & \min\{r_1''(S'') + r_2''((E - \{e\}) - S'') \mid S'' \subseteq E - \{e\}\}
\end{aligned}
$$

- すなわち，ある $S'' \subseteq E - \{e\}$ が存在して，

$$
r_1''(S'') + r_2''((E - \{e\}) - S'') \leq k - 2
$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (2)

- 任意の $X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})$ に対して，$X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$
- $\therefore$ 仮定より，$\max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \leq k-2$
- $\mathcal{I}_1/\{e\}, \mathcal{I}_2/\{e\}$ の階数関数を r_1'', r_2'' とすると，帰納法の仮定より，

$$\begin{aligned} & \max\{|X| \mid X \in (\mathcal{I}_1/\{e\}) \cap (\mathcal{I}_2/\{e\})\} \\ = \ & \min\{r_1''(S'') + r_2''((E-\{e\}) - S'') \mid S'' \subseteq E - \{e\}\} \end{aligned}$$

- すなわち，ある $S'' \subseteq E - \{e\}$ が存在して，

$$r_1''(S'') + r_2''((E-\{e\}) - S'') \leq k-2$$

- 縮約の階数関数の公式 (第 8 回講義スライド 26 ページ) より

$$(r_1(S'' \cup \{e\}) - 1) + (r_2(((E-\{e\}) - S'') \cup \{e\}) - 1) \leq k-2$$

$\boxed{n = \ell \geq 2\text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (3)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

- $r_1(S') + r_2((E - \{e\}) - S') \leq k - 1$
- $r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(((E - \{e\}) - S'') \cup \{e\}) \leq k$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (3)

ここまでのまとめ：背理法で進めて⋯

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

- $r_1(S') + r_2((E - \{e\}) - S') \leq k - 1$
- $r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(((E - \{e\}) - S'') \cup \{e\}) \leq k$

- $(E - \{e\}) - S' = E - (S' \cup \{e\}), ((E - \{e\}) - S'') \cup \{e\} = E - S''$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (3)

ここまでのまとめ：背理法で進めて⋯

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

- $r_1(S') + r_2((E - \{e\}) - S') \leq k - 1$
- $r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(((E - \{e\}) - S'') \cup \{e\}) \leq k$

- $(E - \{e\}) - S' = E - (S' \cup \{e\}), ((E - \{e\}) - S'') \cup \{e\} = E - S''$
- $\therefore$ 2 式を足すと

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k - 1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (4)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k-1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (4)

ここまでのまとめ：背理法で進めて⋯

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k{-}1$$

階数関数の劣モジュラ性より

$$r_1(S') {+} r_1(S'' {\cup} \{e\}) \quad \geq \quad r_1(S' \cup (S'' \cup \{e\})) + r_1(S' \cap (S'' \cup \{e\}))$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (4)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k - 1$$

階数関数の劣モジュラ性より

$$\begin{aligned} r_1(S') + r_1(S'' \cup \{e\}) &\geq r_1(S' \cup (S'' \cup \{e\})) + r_1(S' \cap (S'' \cup \{e\})) \\ &= r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') \end{aligned}$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (4)

ここまでのまとめ：背理法で進めて⋯

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k-1$$

階数関数の劣モジュラ性より

$$\begin{aligned}
r_1(S') + r_1(S'' \cup \{e\}) &\geq r_1(S' \cup (S'' \cup \{e\})) + r_1(S' \cap (S'' \cup \{e\})) \\
&= r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') \\
r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_2(E - S'') &\geq r_2((E - (S' \cup \{e\})) \cup (E - S'')) \\
&\quad + r_2((E - (S' \cup \{e\})) \cap (E - S''))
\end{aligned}$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (4)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k-1$$

階数関数の劣モジュラ性より

$$\begin{aligned} r_1(S') + r_1(S'' \cup \{e\}) &\geq r_1(S' \cup (S'' \cup \{e\})) + r_1(S' \cap (S'' \cup \{e\})) \\ &= r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') \\ r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_2(E - S'') &\geq r_2((E - (S' \cup \{e\})) \cup (E - S'')) \\ &\quad + r_2((E - (S' \cup \{e\})) \cap (E - S'')) \\ &= r_2(E - (S' \cap S'')) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \end{aligned}$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (4)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S') + r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_1(S'' \cup \{e\}) + r_2(E - S'') \leq 2k-1$$

階数関数の劣モジュラ性より

$$\begin{aligned}
r_1(S') + r_1(S'' \cup \{e\}) &\geq r_1(S' \cup (S'' \cup \{e\})) + r_1(S' \cap (S'' \cup \{e\})) \\
&= r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') \\
r_2(E - (S' \cup \{e\})) + r_2(E - S'') &\geq r_2((E - (S' \cup \{e\})) \cup (E - S'')) \\
&\quad + r_2((E - (S' \cup \{e\})) \cap (E - S'')) \\
&= r_2(E - (S' \cap S'')) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\}))
\end{aligned}$$

すなわち,

$$r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') + r_2(E - (S' \cap S'')) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \leq 2k-1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (5)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') + r_2(E - (S' \cap S'')) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \leq 2k - 1$$

$\boxed{n = \ell \geq 2 \text{ のとき}}$ (帰納段階)：続き (5)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$$r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') + r_2(E - (S' \cap S'')) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \leq 2k - 1$$

- このとき，次のいずれか一方は正しい
  1. $r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \leq k - 1$
  2. $r_1(S' \cap S'') + r_2(E - (S' \cap S'')) \leq k - 1$

$\boxed{n = \ell \geq 2\ のとき}$ (帰納段階)：続き (5)

ここまでのまとめ：背理法で進めて…

ある $S', S'' \subseteq E - \{e\}$ に対して

$r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_1(S' \cap S'') + r_2(E - (S' \cap S'')) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \leq 2k - 1$

- このとき，次のいずれか一方は正しい
  1. $r_1(S' \cup S'' \cup \{e\}) + r_2(E - (S' \cup S'' \cup \{e\})) \leq k - 1$
  2. $r_1(S' \cap S'') + r_2(E - (S' \cap S'')) \leq k - 1$
- どちらが正しくても

$$k = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\} \leq k - 1$$

となり，矛盾 □

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

別名：最大共通独立集合問題に対する強双対定理

最大共通独立集合問題に対する弱双対定理：重要性 (再掲)

$|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と $S \subseteq E$ が見つけられれば
X が $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の最大共通独立集合であることが分かる

マトロイド交わり定理：重要性

そのような X と S が必ず存在する

E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$，それらの階数関数 r_1, r_2

マトロイド交わり定理

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$$

マトロイド交わり定理が
最大共通独立集合問題に対するアルゴリズム設計の指針を与える

アルゴリズム設計指針

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. X が $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ の要素であるように「増加」させる
3. X を「増加」させられないとき，
   $|X| = r_1(S) + r_2(E - S)$ を満たす S を見つける

アルゴリズムが次回のテーマ

目次

今回のまとめ

今日の目標

マトロイド交わり定理を理解し，使えるようになる

- 重要概念：弱双対性，強双対性
- 重要概念：最適性の保証

次回の予告

- マトロイド交わり問題に対する効率的アルゴリズム
- マトロイドの合併に対する効率的アルゴリズム

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK