離散最適化基礎論 第 7 回
マトロイドのサーキット

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 12 月 4 日

最終更新：2016 年 8 月 23 日　11:55

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
1. 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
2. マトロイドの定義と例 (10/23)
3. マトロイドの基と階数関数 (10/30)
4. グラフとマトロイド (11/6)
5. マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
6. マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
7. マトロイドのサーキット (12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

マトロイドのサーキットの基本的な性質を証明する

鍵となる概念

- 基本サーキット

基本サーキットを用いて，次を考える

- 基の同時交換公理
- 最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

目次

1. マトロイドのサーキット：復習
2. サーキットの性質
3. 基本サーキットと同時交換公理
4. マトロイドに対する局所探索法
5. 今日のまとめ

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足

- (I1) と (I2) は $\mathcal{I}$ が独立集合族であることを意味する
- (I3) を増加公理 (augmentation property) と呼ぶことがある

用語

- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

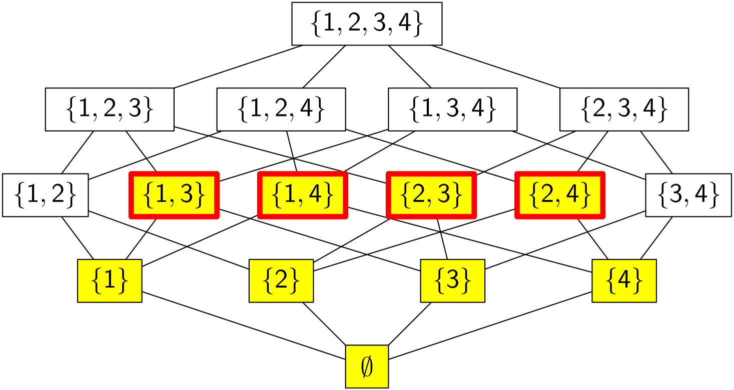
$$\text{任意の } e \in E - B \text{ に対して，} \quad B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$$

別の言い方：基とは極大な独立集合

マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の**基**とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

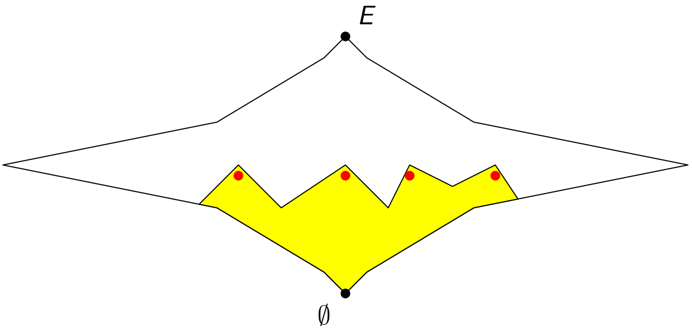
$$\text{任意の } e \in E - B \text{ に対して，} \quad B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$$



マトロイドの基 (base) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基とは，次を満たす独立集合 $B \in \mathcal{I}$

任意の $e \in E - B$ に対して， $B \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$



非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

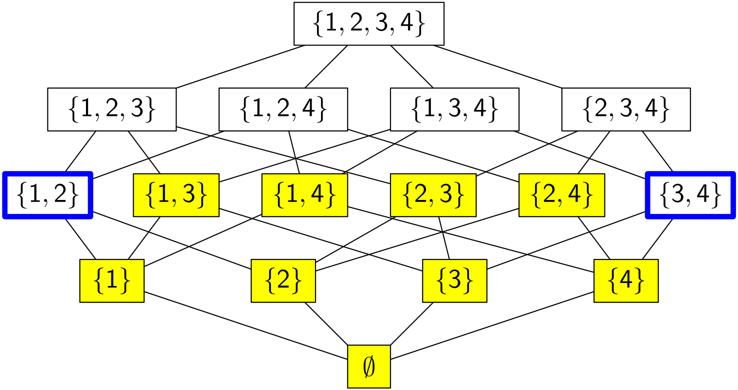
$$\text{任意の } e \in C \text{ に対して，} \quad C - \{e\} \in \mathcal{I}$$

別の言い方：サーキットとは極小な従属集合

マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

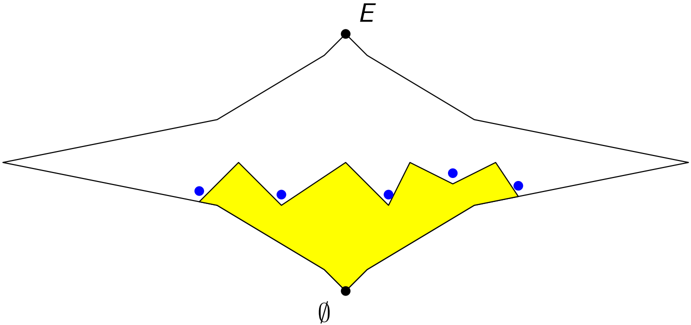
$$\text{任意の } e \in C \text{ に対して，} \quad C - \{e\} \in \mathcal{I}$$



マトロイドのサーキット (circuit) とは？

E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットとは，次を満たす従属集合 $C \notin \mathcal{I}$

$$\text{任意の } e \in C \text{ に対して，} \quad C - \{e\} \in \mathcal{I}$$



非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

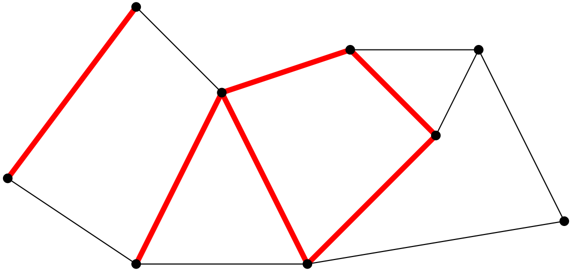
記法：基族とサーキット族

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{B \subseteq E \mid B \text{ は } \mathcal{I} \text{ の基}\}, \\
&\quad (\text{マトロイド } \mathcal{I} \text{ の基族}) \\
\mathcal{C} &= \{C \subseteq E \mid C \text{ は } \mathcal{I} \text{ のサーキット}\} \\
&\quad (\text{マトロイド } \mathcal{I} \text{ のサーキット族})
\end{aligned}
$$

連結無向グラフ $G = (V, E)$

G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$ において

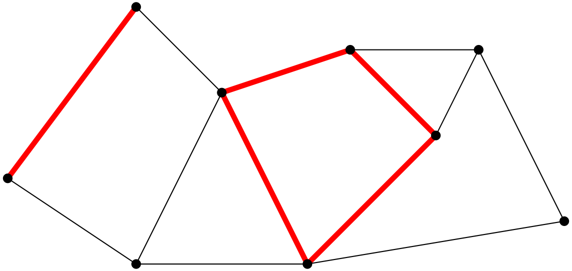
$\mathcal{I}$	G
独立集合	閉路を含まない部分グラフ (の辺集合)
基	全域木 (の辺集合)
従属集合	閉路を含む部分グラフ (の辺集合)
サーキット	閉路 (の辺集合)



連結無向グラフ $G = (V, E)$

G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$ において

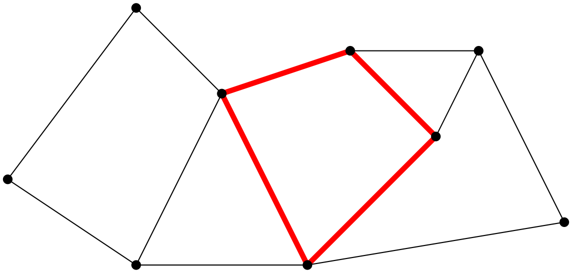
$\mathcal{I}$	G
独立集合	閉路を含まない部分グラフ (の辺集合)
基	全域木 (の辺集合)
従属集合	閉路を含む部分グラフ (の辺集合)
サーキット	閉路 (の辺集合)



連結無向グラフ $G = (V, E)$

G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$ において

$\mathcal{I}$	G
独立集合	閉路を含まない部分グラフ (の辺集合)
基	全域木 (の辺集合)
従属集合	閉路を含む部分グラフ (の辺集合)
サーキット	閉路 (の辺集合)



目次

1. マトロイドのサーキット：復習
2. サーキットの性質
3. 基本サーキットと同時交換公理
4. マトロイドに対する局所探索法
5. 今日のまとめ

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (1)

C は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq X \Rightarrow X \notin \mathcal{I}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (1)

C は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq X \Rightarrow X \notin \mathcal{I}$

証明：C が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq X$ と仮定

- $X \in \mathcal{I}$ であると仮定する (背理法)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (1)

C は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq X \Rightarrow X \notin \mathcal{I}$

証明：C が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq X$ と仮定

- $X \in \mathcal{I}$ であると仮定する (背理法)
- $C \subseteq X$ なので，(I2) より，$C \in \mathcal{I}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (1)

C は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq X \Rightarrow X \notin \mathcal{I}$

証明：C が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq X$ と仮定

- $X \in \mathcal{I}$ であると仮定する (背理法)
- $C \subseteq X$ なので，(I2) より，$C \in \mathcal{I}$
- 一方，C は $\mathcal{I}$ のサーキットなので，$C \notin \mathcal{I}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (1)

C は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq X \Rightarrow X \notin \mathcal{I}$

証明：C が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq X$ と仮定

- $X \in \mathcal{I}$ であると仮定する (背理法)
- $C \subseteq X$ なので，(I2) より，$C \in \mathcal{I}$
- 一方，C は $\mathcal{I}$ のサーキットなので，$C \notin \mathcal{I}$
- この 2 つは互いに矛盾 $\square$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (2)

C, C' は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (2)

C, C' は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

<u>証明</u>：C, C' が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq C'$ と仮定

- $C \neq C'$ と仮定する (背理法)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (2)

C, C' は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

証明：C, C' が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq C'$ と仮定

- $C \neq C'$ と仮定する (背理法)
- このとき，ある要素 $e' \in C' - C$ が存在して，$C \subseteq C' - \{e'\}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (2)

C, C' は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

証明：C, C' が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq C'$ と仮定

- $C \neq C'$ と仮定する (背理法)
- このとき，ある要素 $e' \in C' - C$ が存在して，$C \subseteq C' - \{e'\}$
- 前のページの性質 (1) より，$C' - \{e'\} \notin \mathcal{I}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質 (2)

C, C' は $\mathcal{I}$ のサーキット，$C \subseteq C' \Rightarrow C = C'$

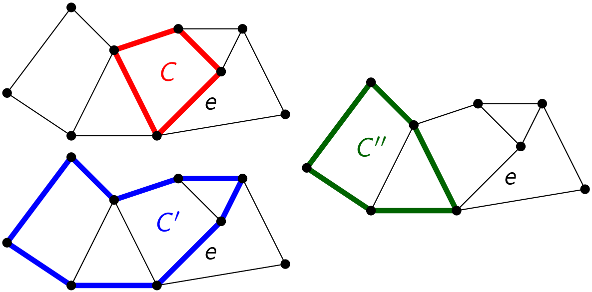
証明：C, C' が $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq C'$ と仮定

- $C \neq C'$ と仮定する (背理法)
- このとき，ある要素 $e' \in C' - C$ が存在して，$C \subseteq C' - \{e'\}$
- 前のページの性質 (1) より，$C' - \{e'\} \notin \mathcal{I}$
- これは C' がサーキットであることに矛盾 □

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ ⇒
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$



弱消去公理：weak elimination property

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ ⇒
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定

- 前々ページの性質 (2) より，$C - C' \neq \emptyset$ かつ $C' - C \neq \emptyset$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定

- 前々ページの性質 (2) より，$C - C' \neq \emptyset$ かつ $C' - C \neq \emptyset$
- つまり，$C \cap C'$ は C, C' の真部分集合である

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定

- 前々ページの性質 (2) より，$C - C' \neq \emptyset$ かつ $C' - C \neq \emptyset$
- つまり，$C \cap C'$ は C, C' の真部分集合である
- サーキットの定義より，$C \cap C' \in \mathcal{I}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定

- 前々ページの性質 (2) より，$C - C' \neq \emptyset$ かつ $C' - C \neq \emptyset$
- つまり，$C \cap C'$ は C, C' の真部分集合である
- サーキットの定義より，$C \cap C' \in \mathcal{I}$
- 特に，$r(C \cap C') = |C \cap C'|$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：C, C' は異なるサーキットであり，$e \in C \cap C'$ と仮定

- 前々ページの性質 (2) より，$C - C' \neq \emptyset$ かつ $C' - C \neq \emptyset$
- つまり，$C \cap C'$ は C, C' の真部分集合である
- サーキットの定義より，$C \cap C' \in \mathcal{I}$
- 特に，$r(C \cap C') = |C \cap C'|$
- C, C' は従属集合なので，$r(C) < |C|, r(C') < |C'|$
- 特に，$r(C) \leq |C| - 1$, $r(C') \leq |C'| - 1$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

- $r((C \cup C') - \{e\})$
  $\leq r(C \cup C')$ (階数の単調性)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ ⇒
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

- $r((C \cup C') - \{e\})$
  $\leq r(C \cup C')$ (階数の単調性)
  $\leq r(C) + r(C') - r(C \cap C')$ (階数の劣モジュラ性)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

- $r((C \cup C') - \{e\})$
  $\leq r(C \cup C')$ (階数の単調性)
  $\leq r(C) + r(C') - r(C \cap C')$ (階数の劣モジュラ性)
  $\leq (|C| - 1) + (|C'| - 1) - r(C \cap C')$ (前ページで示した事項)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

- $$\begin{aligned} & r((C \cup C') - \{e\}) \\ & \leq r(C \cup C') && \text{(階数の単調性)} \\ & \leq r(C) + r(C') - r(C \cap C') && \text{(階数の劣モジュラ性)} \\ & \leq (|C| - 1) + (|C'| - 1) - r(C \cap C') && \text{(前ページで示した事項)} \\ & = (|C| - 1) + (|C'| - 1) - |C \cap C'| && (C \cap C' \in \mathcal{I}) \end{aligned}$$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

- $$\begin{aligned} & r((C \cup C') - \{e\}) \\ \le\ & r(C \cup C') && \text{(階数の単調性)} \\ \le\ & r(C) + r(C') - r(C \cap C') && \text{(階数の劣モジュラ性)} \\ \le\ & (|C| - 1) + (|C'| - 1) - r(C \cap C') && \text{(前ページで示した事項)} \\ =\ & (|C| - 1) + (|C'| - 1) - |C \cap C'| && (C \cap C' \in \mathcal{I}) \\ =\ & |C| + |C'| - |C \cap C'| - 2 \end{aligned}$$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C' \Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

- $$\begin{aligned} & r((C \cup C') - \{e\}) \\ &\leq r(C \cup C') && \text{(階数の単調性)} \\ &\leq r(C) + r(C') - r(C \cap C') && \text{(階数の劣モジュラ性)} \\ &\leq (|C| - 1) + (|C'| - 1) - r(C \cap C') && \text{(前ページで示した事項)} \\ &= (|C| - 1) + (|C'| - 1) - |C \cap C'| && (C \cap C' \in \mathcal{I}) \\ &= |C| + |C'| - |C \cap C'| - 2 \\ &= |C \cup C'| - 2 = |(C \cup C') - \{e\}| - 1 \end{aligned}$$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：弱消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明 (続き)：したがって，次の式が得られる

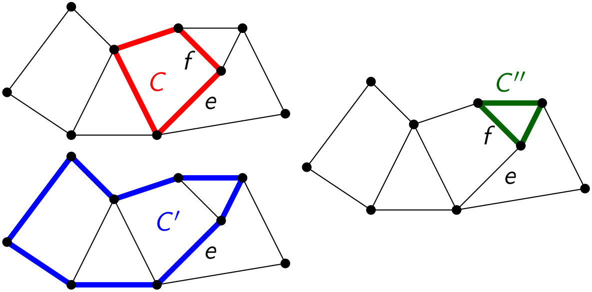
- $r((C \cup C') - \{e\})$
  $\leq r(C \cup C')$ (階数の単調性)
  $\leq r(C) + r(C') - r(C \cap C')$ (階数の劣モジュラ性)
  $\leq (|C| - 1) + (|C'| - 1) - r(C \cap C')$ (前ページで示した事項)
  $= (|C| - 1) + (|C'| - 1) - |C \cap C'|$ ($C \cap C' \in \mathcal{I}$)
  $= |C| + |C'| - |C \cap C'| - 2$
  $= |C \cup C'| - 2 = |(C \cup C') - \{e\}| - 1$
- $\therefore$ $C \cup C' - \{e\}$ は従属集合であり，サーキットを含む □

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドのサーキットの性質：強消去公理

C, C' は $\mathcal{I}$ の異なるサーキット，$e \in C \cap C'$，$f \in C - C'$ $\Rightarrow$
$\mathcal{I}$ のあるサーキット C'' が存在して，$f \in C'' \subseteq (C \cup C') - \{e\}$

証明：演習問題



強消去公理：strong elimination property

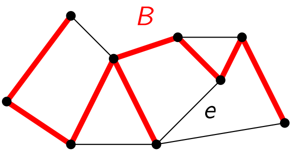
目次

1. マトロイドのサーキット：復習
2. サーキットの性質
3. 基本サーキットと同時交換公理
4. マトロイドに対する局所探索法
5. 今日のまとめ

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む



非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

証明：$X \cup \{e\}$ が従属ならば，サーキットの定義より，サーキットを含む

- 異なる 2 つのサーキット C, C' を $X \cup \{e\}$ が含むと仮定 (背理法)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

証明：$X \cup \{e\}$ が従属ならば，サーキットの定義より，サーキットを含む

- 異なる 2 つのサーキット C, C' を $X \cup \{e\}$ が含むと仮定 (背理法)
- $X \in \mathcal{I}$ なので，$e \in C$ かつ $e \in C'$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

証明：$X \cup \{e\}$ が従属ならば，サーキットの定義より，サーキットを含む

- 異なる 2 つのサーキット C, C' を $X \cup \{e\}$ が含むと仮定 (背理法)
- $X \in \mathcal{I}$ なので，$e \in C$ かつ $e \in C'$
- $\therefore e \in C \cap C'$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

証明：$X \cup \{e\}$ が従属ならば，サーキットの定義より，サーキットを含む

- 異なる 2 つのサーキット C, C' を $X \cup \{e\}$ が含むと仮定 (背理法)
- $X \in \mathcal{I}$ なので，$e \in C$ かつ $e \in C'$
- $\therefore e \in C \cap C'$
- 弱消去公理より，$(C \cup C') - \{e\}$ に含まれるサーキットが存在

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

証明：$X \cup \{e\}$ が従属ならば，サーキットの定義より，サーキットを含む

- 異なる 2 つのサーキット C, C' を $X \cup \{e\}$ が含むと仮定 (背理法)
- $X \in \mathcal{I}$ なので，$e \in C$ かつ $e \in C'$
- $\therefore e \in C \cap C'$
- 弱消去公理より，$(C \cup C') - \{e\}$ に含まれるサーキットが存在
- しかし，$(C \cup C') - \{e\} \subseteq X$ なので，$X \in \mathcal{I}$ に矛盾 $\square$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

命題

任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の要素 $e \in E - X$ に対して，
$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

命題の系 (ただちに分かること)

$\mathcal{I}$ の任意の基 B と任意の要素 $e \in E - B$ に対して，
$B \cup \{e\}$ は $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含む

このサーキットを，B に関する e の基本サーキットと呼び，
$C(e, B)$ で表す

基の同時交換公理 (simultaneous exchange property)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

注：第 3 回講義で証明した基交換公理は以下の通り

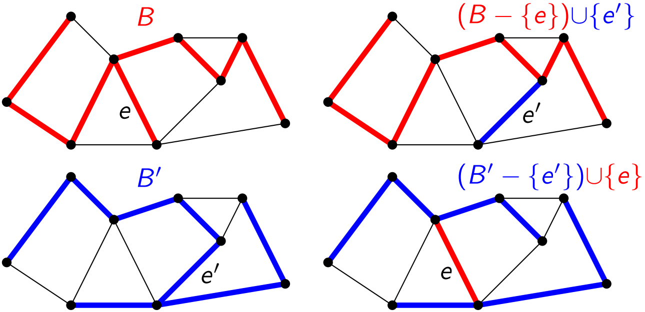
マトロイドの基の性質：基交換公理 (base exchange property)

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ も $\mathcal{I}$ の基

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基



非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ はサーキットを含む (それを C とする)

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ はサーキットを含む (それを C とする)
- $C \subseteq B$ であると $B \in \mathcal{I}$ と (I2) に矛盾するので，$e' \in C$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ はサーキットを含む (それを C とする)
- $C \subseteq B$ であると $B \in \mathcal{I}$ と (I2) に矛盾するので，$e' \in C$
- 一方，$B \cup \{e'\}$ が含むサーキットはただ 1 つなので，$C = C(e', B)$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ はサーキットを含む (それを C とする)
- $C \subseteq B$ であると $B \in \mathcal{I}$ と (I2) に矛盾するので，$e' \in C$
- 一方，$B \cup \{e'\}$ が含むサーキットはただ 1 つなので，$C = C(e', B)$
- $\therefore e \in C(e', B) \subseteq (B - \{e\}) \cup \{e'\}$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明：$e = e'$ のとき，$(B - \{e\}) \cup \{e'\} = B$ なので，これは基

- 次に，$e \neq e'$ のときを考える
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ が従属であると仮定 (背理法)
- $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ はサーキットを含む (それを C とする)
- $C \subseteq B$ であると $B \in \mathcal{I}$ と (I2) に矛盾するので，$e' \in C$
- 一方，$B \cup \{e'\}$ が含むサーキットはただ 1 つなので，$C = C(e', B)$
- $\therefore e \in C(e', B) \subseteq (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
- これは，$e \notin (B - \{e\}) \cup \{e'\}$ に矛盾

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明 (続き)：したがって，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ は独立

- ここで，$|B| = |(B - \{e\}) \cup \{e'\}|$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

補題 B

B が $\mathcal{I}$ の基，$e, e' \in E$ に対して

$$e \in C(e', B) \quad \Rightarrow \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ も } \mathcal{I} \text{ の基}$$

証明 (続き)：したがって，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ は独立

- ここで，$|B| = |(B - \{e\}) \cup \{e'\}|$
- 第 3 回講義補題 A より，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ は基 □

マトロイドの基の性質：補題 A (第 3 回講義より)

B が $\mathcal{I}$ の基，$X \in \mathcal{I}$，$|B| = |X| \quad \Rightarrow \quad X$ も $\mathcal{I}$ の基

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

<u>証明</u>：$C' = C(e, B')$ とする

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

証明：$C' = C(e, B')$ とする

- 次の集合族 $\mathcal{F}$ を考える ($\mathcal{C}$ は $\mathcal{I}$ のサーキット族)

$$\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} \mid e \in C \subseteq B \cup B', C - B \subseteq C' - B\}$$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

証明：$C' = C(e, B')$ とする

- 次の集合族 $\mathcal{F}$ を考える ($\mathcal{C}$ は $\mathcal{I}$ のサーキット族)

$$\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} \mid e \in C \subseteq B \cup B', C - B \subseteq C' - B\}$$

- $C' \in \mathcal{F}$ なので，$\mathcal{F} \neq \emptyset$

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

証明：$C' = C(e, B')$ とする

- 次の集合族 $\mathcal{F}$ を考える ($\mathcal{C}$ は $\mathcal{I}$ のサーキット族)

$$\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} \mid e \in C \subseteq B \cup B', C - B \subseteq C' - B\}$$

- $C' \in \mathcal{F}$ なので，$\mathcal{F} \neq \emptyset$
- $\mathcal{F}$ の要素 C で，$|C - B|$ を最小とするものを C^* とする

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドの基の性質：同時交換公理

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基

証明：$C' = C(e, B')$ とする

- 次の集合族 $\mathcal{F}$ を考える ($\mathcal{C}$ は $\mathcal{I}$ のサーキット族)

$$\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{C} \mid e \in C \subseteq B \cup B', C - B \subseteq C' - B\}$$

- $C' \in \mathcal{F}$ なので，$\mathcal{F} \neq \emptyset$
- $\mathcal{F}$ の要素 C で，$|C - B|$ を最小とするものを C^* とする
- このとき，$|C^* - B| \geq 1$ (なぜか？)

$|C^* - B| \geq 1$ (なぜか？)

- $|C^* - B| = 0$ だと仮定する
- つまり，$C^* \subseteq B$
- C^* は従属集合であり，$B \in \mathcal{I}$ なので，サーキットの定義に矛盾 $\square$

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立
  - $C \subseteq B \cup B'$ $\quad (\because C^* \subseteq B \cup B')$

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立
  - $C \subseteq B \cup B'$ $\quad (\because C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C - B \subseteq C' - B$ $\quad (\because C - B = \{x\} \subseteq C^* - B \subseteq C' - B)$

主張

$|C^* - B| = 1$

<u>主張の証明</u>：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立
  - $C \subseteq B \cup B'$ $\quad (\because C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C - B \subseteq C' - B$ $\quad (\because C - B = \{x\} \subseteq C^* - B \subseteq C' - B)$
  - $|C^* - B| > |C - B|$ $\quad (\because |C^* - B| \geq 2,\ |C - B| = |\{x\}| = 1)$

基の同時交換公理：証明 (2)

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立
  - $C \subseteq B \cup B'$ $\quad (\because C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C - B \subseteq C' - B$ $\quad (\because C - B = \{x\} \subseteq C^* - B \subseteq C' - B)$
  - $|C^* - B| > |C - B|$ $\quad (\because |C^* - B| \geq 2, |C - B| = |\{x\}| = 1)$
- C^* の構成法から，$e \notin C$

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明：$|C^* - B| \geq 2$ であると仮定 (背理法)

- $x \in C^* - B$ として，$C = C(x, B)$ とする
- このとき，次が成立
  - $C \subseteq B \cup B'$ $\quad(\because C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C - B \subseteq C' - B$ $\quad(\because C - B = \{x\} \subseteq C^* - B \subseteq C' - B)$
  - $|C^* - B| > |C - B|$ $\quad(\because |C^* - B| \geq 2,\ |C - B| = |\{x\}| = 1)$
- C^* の構成法から，$e \notin C$
- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

主張

$|C^* - B| = 1$

<u>主張の証明 (続き)</u>：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明 (続き)：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

- このとき，次が成立
  - $C'' \subseteq B \cup B'$ $(\because C, C^* \subseteq B \cup B')$

基の同時交換公理：証明 (3)

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明 (続き)：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

- このとき，次が成立
  - $C'' \subseteq B \cup B'$ $\qquad (\because C, C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C'' - B \subseteq C' - B$
    $(\because C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq (C - B) \cup (C^* - B) \subseteq C' - B)$

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明 (続き)：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

- このとき，次が成立
  - $C'' \subseteq B \cup B'$ $\quad (\because C, C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C'' - B \subseteq C' - B$
    $(\because C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq (C - B) \cup (C^* - B) \subseteq C' - B)$
- したがって，$C'' \in \mathcal{F}$

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明 (続き)：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

- このとき，次が成立
  - $C'' \subseteq B \cup B'$ $\qquad (\because\ C, C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C'' - B \subseteq C' - B$
    $(\because\ C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq (C - B) \cup (C^* - B) \subseteq C' - B)$
- したがって，$C'' \in \mathcal{F}$
- 一方，$|C'' - B| < |C^* - B|$ $\qquad$ (なぜか？)

主張

$|C^* - B| = 1$

主張の証明 (続き)：

- 強消去公理より，$\mathcal{I}$ のサーキット C'' で次を満たすものが存在

$$e \in C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$$

- このとき，次が成立
  - $C'' \subseteq B \cup B'$ $(\because C, C^* \subseteq B \cup B')$
  - $C'' - B \subseteq C' - B$
    $(\because C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq (C - B) \cup (C^* - B) \subseteq C' - B)$
- したがって，$C'' \in \mathcal{F}$
- 一方，$|C'' - B| < |C^* - B|$ (なぜか？)
- これは C^* の構成法に矛盾 □

基の同時交換公理：証明 (3')

$|C'' - B| < |C^* - B|$ （なぜか？）

- $C'' \subseteq (C \cup C^*) - \{x\}$ かつ $C = C(x, B) \subseteq B \cup \{x\}$ より
  $C'' - B \subseteq ((C \cup C^*) - \{x\}) - B \subseteq C^* - B$
- $x \notin C''$ より，$x \notin C'' - B$
- 一方で，x の定義より，$x \in C^* - B$
- したがって，$C'' - B$ は $C^* - B$ の真部分集合
- ゆえに，$|C'' - B| < |C^* - B|$ □

主張より，ある $e' \in E$ が存在して，$C^* - B = \{e'\}$

主張より，ある $e' \in E$ が存在して，$C^* - B = \{e'\}$

- このとき，$C^* = C(e', B)$ であり，$e \in C^*$

主張より，ある $e' \in E$ が存在して，$C^* - B = \{e'\}$

- このとき，$C^* = C(e', B)$ であり，$e \in C^*$
- また，$e' \in C^* - B \subseteq C' - B$ なので，$e' \in C' = C(e, B')$

ここまでで証明できたこと：まとめ

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$e \in C(e', B)$ かつ $e' \in C(e, B')$

主張より，ある $e' \in E$ が存在して，$C^* - B = \{e'\}$

- このとき，$C^* = C(e', B)$ であり，$e \in C^*$
- また，$e' \in C^* - B \subseteq C' - B$ なので，$e' \in C' = C(e, B')$

ここまでで証明できたこと：まとめ

B, B' が $\mathcal{I}$ の基 $\Rightarrow$ 任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$e \in C(e', B)$ かつ $e' \in C(e, B')$

- したがって，補題 B より，
  $(B - \{e\}) \cup \{e'\}, (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も $\mathcal{I}$ の基 □

目次

1. マトロイドのサーキット：復習
2. サーキットの性質
3. 基本サーキットと同時交換公理
4. マトロイドに対する局所探索法
5. 今日のまとめ

マトロイドの最大独立集合問題

有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} \quad & X \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

第 5 回講義 (観察 1)：最適解として，基であるものが存在する

- つまり，重み和が最大の基を見つければよい

局所探索法：基本的な考え方

- 基を 1 つ，常に保持する
- 要素を交換することで，重み和の大きい基を見つける
- 交換で重み和を大きくできなくなったら，終了

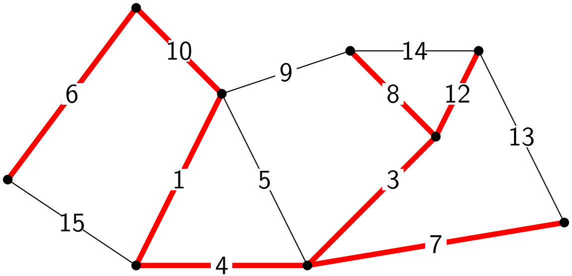
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了

基の取りうる重み和の種類は有限なので，
このアルゴリズムも有限回の繰り返しで必ず停止する

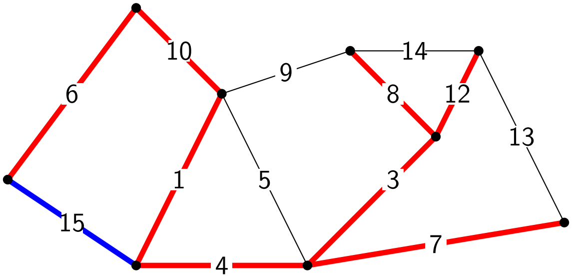
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad かつ \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} が \mathcal{I} の基$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



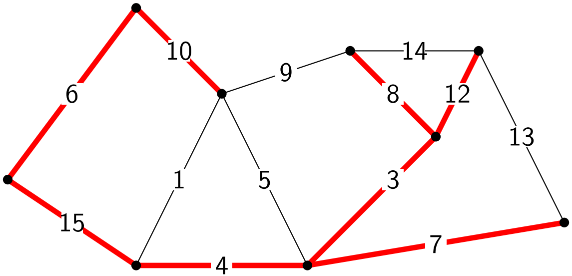
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



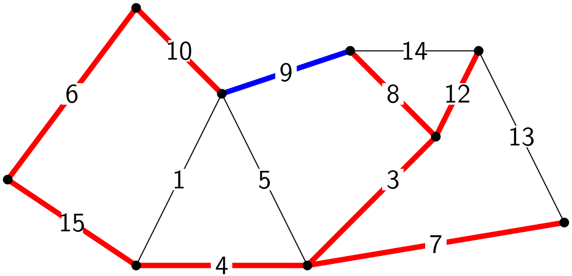
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



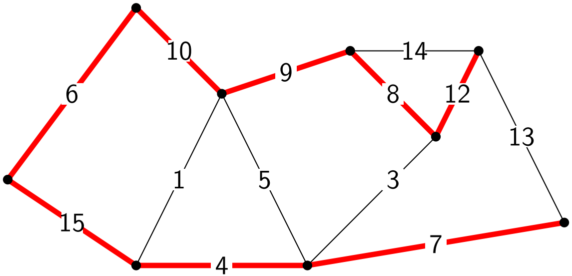
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



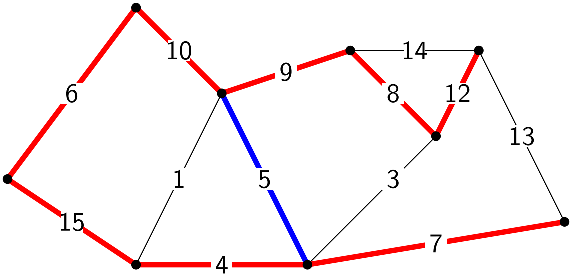
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



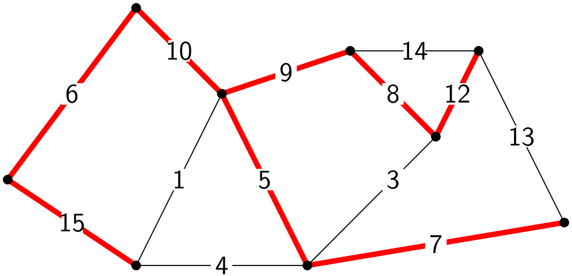
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



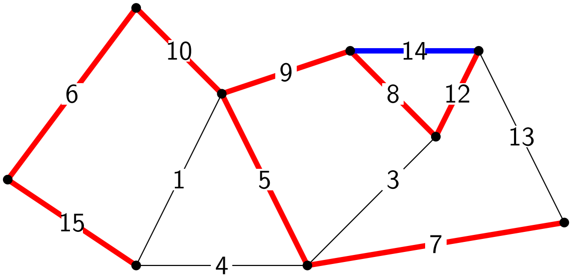
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



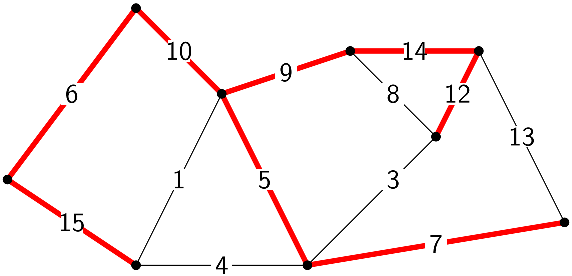
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



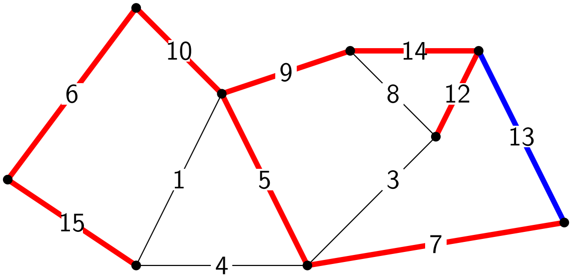
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



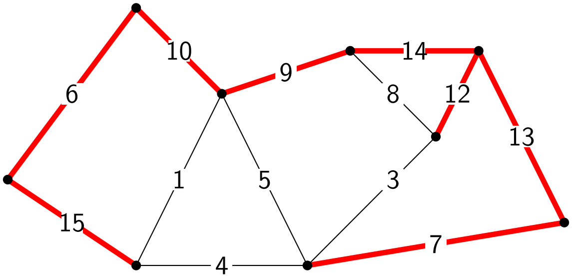
最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

1. $B \leftarrow \mathcal{I}$ の任意の基
2. ある $e \in B$ とある $e' \in E - B$ に対して，
$$w(e) < w(e') \quad \text{かつ} \quad (B - \{e\}) \cup \{e'\} \text{ が } \mathcal{I} \text{ の基}$$
ならば，$B \leftarrow (B - \{e\}) \cup \{e'\}$
3. そのような $e \in B$ と $e' \in E - B$ が存在する限り，上を繰り返す
4. 存在しないとき，B を出力して終了



非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$

局所探索アルゴリズムの正当性

局所探索アルゴリズムの出力は最大独立集合問題の最適解である

<u>証明の方針</u>：

- アルゴリズムの出力を B，最適解を B' とする
- $\boxed{\text{証明の目標}}$: $\sum_{e \in B} w(e) \geq \sum_{e \in B'} w(e)$ (これを示せば十分)
- そのために，同時交換公理を用いる
- 実際は背理法で証明を進める

局所探索アルゴリズムの正当性：証明 (1)

- アルゴリズムの出力を B として，これが最適解ではないと仮定
- B' は最適解で，$|B \cap B'|$ が最大のものであるとする
  - B は最適解ではないので，$B \neq B'$

局所探索アルゴリズムの正当性：証明 (1)

- アルゴリズムの出力を B として，これが最適解ではないと仮定
- B' は最適解で，$|B \cap B'|$ が最大のものであるとする
  - B は最適解ではないので，$B \neq B'$
- 同時交換公理より，
  任意の $e \in B - B'$ に対して，ある $e' \in B' - B$ が存在して
  $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ と $(B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も基である

局所探索アルゴリズムの正当性：証明 (1)

- アルゴリズムの出力を B として，これが最適解ではないと仮定
- B' は最適解で，$|B \cap B'|$ が最大のものであるとする
  - B は最適解ではないので，$B \neq B'$
- 同時交換公理より，
  任意の $e \in B - B'$ に対して，ある $e' \in B' - B$ が存在して
  $(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ と $(B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も基である
- B はアルゴリズムの出力なので，$w(e) \geq w(e')$

- B' は最適解なので，$\displaystyle\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$

- B' は最適解なので，$\displaystyle\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$

- B' は最適解なので，$\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$
- $\therefore w(e) = w(e')$

- B' は最適解なので，$\displaystyle\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$
- $\therefore\ w(e) = w(e')$
- $\therefore\ (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も最適解

- B' は最適解なので，$\displaystyle\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$
- $\therefore w(e) = w(e')$
- $\therefore (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も最適解
- しかし，

$$|B \cap (B' - \{e'\}) \cup \{e\}| = |B \cap B'| + 1 > |B \cap B'|$$

- B' は最適解なので，$\displaystyle\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$
- $\therefore w(e) = w(e')$
- $\therefore (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も最適解
- しかし，

$$|B \cap (B' - \{e'\}) \cup \{e\}| = |B \cap B'| + 1 > |B \cap B'|$$

- これは B' の選び方に 矛盾

- B' は最適解なので，$\sum_{f \in B'} w(f) \geq \sum_{f \in (B' - \{e'\}) \cup \{e\}} w(f)$
- すなわち，$w(e') \geq w(e)$
- $\therefore w(e) = w(e')$
- $\therefore (B' - \{e'\}) \cup \{e\}$ も最適解
- しかし，

$$|B \cap (B' - \{e'\}) \cup \{e\}| = |B \cap B'| + 1 > |B \cap B'|$$

- これは B' の選び方に 矛盾

したがって，B は最適解である □

目次

1. マトロイドのサーキット：復習
2. サーキットの性質
3. 基本サーキットと同時交換公理
4. マトロイドに対する局所探索法
5. 今日のまとめ

今日の目標

マトロイドのサーキットの基本的な性質を証明する

鍵となる概念

- 基本サーキット

基本サーキットを用いて，次を考える

- 基の同時交換公理
- 最大独立集合問題に対する局所探索アルゴリズム

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次

1. マトロイドのサーキット：復習
2. サーキットの性質
3. 基本サーキットと同時交換公理
4. マトロイドに対する局所探索法
5. 今日のまとめ