離散最適化基礎論 第 1 回
組合せ最適化におけるマトロイドの役割

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 10 月 9 日

最終更新：2015 年 10 月 9 日　21:45

概要

主題

離散最適化のトピックの１つとして
組合せ最適化におけるマトロイドの役割を取り上げ,

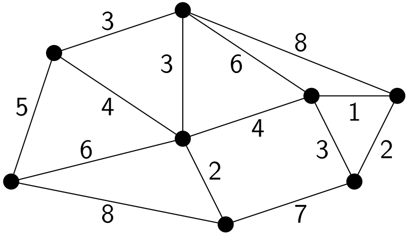
- マトロイドとは何か？
- マトロイドがなぜ役に立つのか？
- マトロイドがどう役に立つのか？

について，数理的側面と計算的側面の双方を意識して講義する

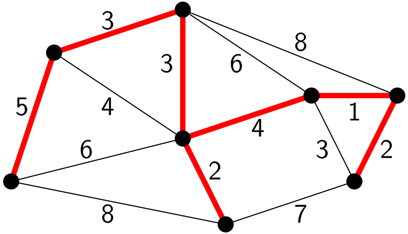
なぜ講義で取り扱う？

- 「組合せ最適化の神髄」だから

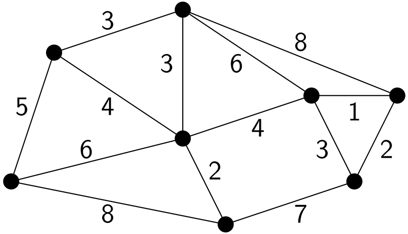
最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような重み和最小のネットワークを作る



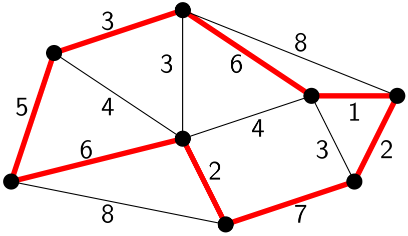
最小全域木問題：すべての頂点間に経路が存在するような
重み和最小のネットワークを作る



巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような重み和最小の巡回路を作る



巡回セールスマン問題：すべての頂点をちょうど一度ずつ通るような
重み和最小の巡回路を作る



テーマ：組合せ最適化問題の解きやすさ

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- …

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- …

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

(参考：アルゴリズム論第一・第二)

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

(参考：計算理論)

解きやすい問題

- 最小全域木問題
- 最大マッチング問題
- 最小カット問題
- ...

解きにくい問題

- 巡回セールスマン問題
- 最小頂点被覆問題
- 最小彩色問題
- ...

「解きやすい」とは

多項式時間解法が存在する

(参考：アルゴリズム論第一・第二)

「解きにくい」とは

NP 困難性が証明されている

(参考：計算理論)

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\leadsto$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

スケジュール 前半 (予定)

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフの全域木 (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

情報

教員

- 岡本 吉央 (おかもと よしお)
- 居室：西 4 号館 2 階 206 号室
- E-mail：okamotoy@uec.ac.jp
- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/

講義資料

- Web：http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2015/matroid/
- 注意：資料の印刷等は各学生が自ら行う
- 講義当日の昼 12 時までに，ここに置かれる
- Twitter (@okamoto7yoshio)：置かれたことを知らせる tweet

http://dopal.cs.uec.ac.jp/okamotoy/lect/2015/matroid/

- スライド
- 印刷用スライド：8 枚のスライドを 1 ページに収めたもの
- 演習問題

「印刷用スライド」と「演習問題」は各自印刷して持参すると便利

講義 (80 分)

- スライドと板書で進める
- スライドのコピーに重要事項のメモを取る

演習 (10 分)

- 演習問題に取り組む
- 不明な点は教員に質問する

退室 (0 分) ←重要

- コメント (授業の感想，質問など) を紙に書いて提出する (匿名可)
- コメントとそれに対する回答は (匿名で) 講義ページに掲載される

オフィスアワー：金曜 5 限 (岡本居室か CED)

- 質問など
- ただし，いないときもあるので注意 (注意：情報数理工学セミナー)

演習問題

演習問題の進め方

- 授業のおわり 15 分は演習問題を解く時間
- 残った演習問題は復習・試験対策用
- 注意：「模範解答」のようなものは存在しない

演習問題の種類

- 復習問題：講義で取り上げた内容を反復
- 補足問題：講義で省略した内容を補足
- 追加問題：講義の内容に追加
- 発展問題：少し難しい (かもしれない)

答案の提出

- 演習問題の答案をレポートとして提出してもよい
- レポートには提出締切がある (各回にて指定)
- レポートは採点されない (成績に勘案されない)
- レポートにはコメントがつけられて，返却される
    - 返却された内容については，再提出ができる (再提出締切は原則なし)

評価

期末試験のみによる

- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
  - その中の 3 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 20 点満点，計 120 点満点
- 成績において，100 点以上は 100 点で打ち切り
- 時間：90 分 (おそらく)
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

教科書

- 指定しない

全般的な参考書

- B. コルテ，J. フィーゲン (著)，浅野孝夫，浅野泰仁，小野孝男，平田富夫 (訳),『組合せ最適化 第 2 版』，丸善出版，2012 年.
- W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1997.
- A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer, 2002.
- J. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford, 1992.
- その他，研究論文

- 私語はしない (ただし，演習時間の相談は積極的に OK)
- 携帯電話はマナーモードにする
- この講義と関係のないことを (主に電子機器で) しない
- 音を立てて睡眠しない

約束が守られない場合は退席してもらう場合あり

目次

ナップサック問題 (森，松井 '04 より)

- いま手元に 4 つの商品が 1 つずつあるとしよう．
- これをナップサックに詰めて街に売りに行くとする．
- それぞれの重さと，売った際の収益は表の通りとする．

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

- 商品はどれも，街にもっていけば必ず売れるとする．
- ただし，街にもっていく際ナップサックに積めて運ぶのだが，ナップサックに積載重量制限があり，最大でも 4 kg までしか積めないとする．
- このとき，ナップサックの重量制限以内で総収益を最大にするには，どの荷物を積めていったらよいか？

例 1：ナップサック問題 — 積めるか積めないか (1)

商品の集合 $\{1, 2, 3, 4\}$，ナップサックの積載重量制限は 4 kg

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

$\{1, 2, 3, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 3 + 1 + 3 = 9$ → 積めない
$\{1, 2, 3\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 3 + 1 = 6$ → 積めない
$\{1, 2, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 3 + 3 = 8$ → 積めない
$\{1, 3, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 1 + 3 = 6$ → 積めない
$\{2, 3, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 3 + 1 + 3 = 7$ → 積めない
$\{1, 2\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 3 = 5$ → 積めない
$\{1, 3\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 1 = 3$ → 積める
$\{1, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2 + 3 = 5$ → 積めない

例 1：ナップサック問題 — 積めるか積めないか (2)

商品の集合 $\{1, 2, 3, 4\}$，ナップサックの積載重量制限は 4 kg

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

$\{2, 3\}$ は積めるか → 重さの和 $= 3 + 1 = 4$ → 積める
$\{2, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 3 + 3 = 6$ → 積めない
$\{3, 4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 1 + 3 = 4$ → 積める
$\{1\}$ は積めるか → 重さの和 $= 2$ → 積める
$\{2\}$ は積めるか → 重さの和 $= 3$ → 積める
$\{3\}$ は積めるか → 重さの和 $= 1$ → 積める
$\{4\}$ は積めるか → 重さの和 $= 3$ → 積める
$\emptyset$ は積めるか → 重さの和 $= 0$ → 積める

例 1：ナップサック問題 — 許容集合

商品の集合 $\{1,2,3,4\}$，ナップサックの積載重量制限は 4 kg

商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

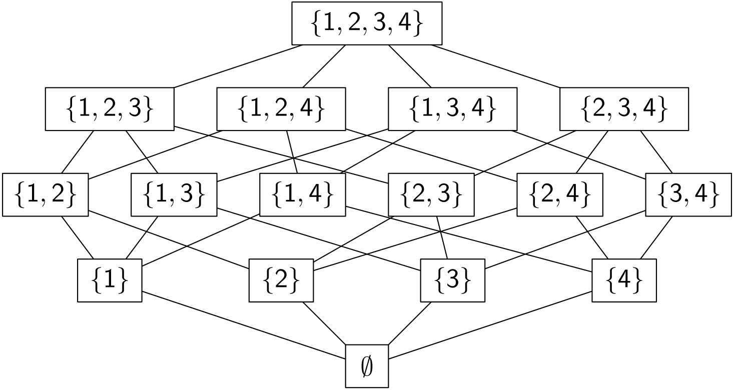
- この問題の許容集合 (feasible set) は

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$$

- $\mathcal{F}$ の中で収入和が最も大きいものを選びたい (目的は最大化)

(許容集合の定義は後述)

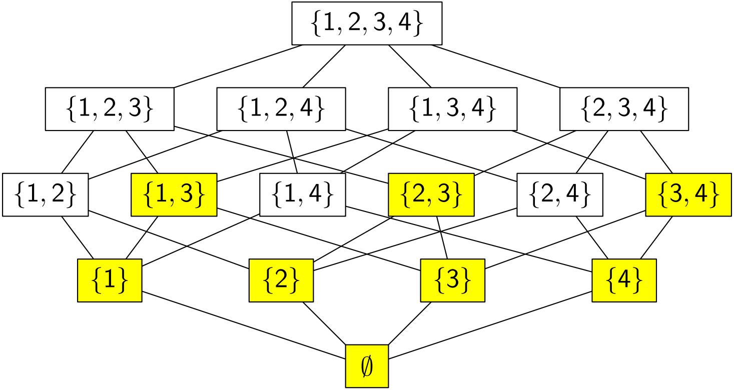
例 1：ナップサック問題 — 許容集合 (図示)



$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$$

ハッセ図 (Hasse diagram)

$\mathcal{F}$ の要素を黄色で表している

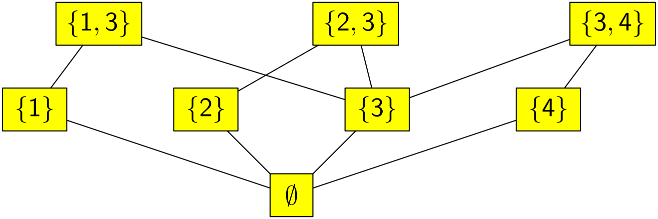


$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$$

ハッセ図 (Hasse diagram)

例 1：ナップサック問題 — 許容集合 (図示)

$\mathcal{F}$ の要素を黄色で表している



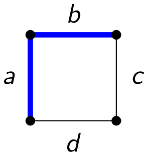
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$$

ハッセ図 (Hasse diagram)

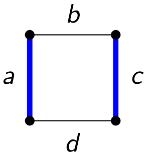
無向グラフ $G = (V, E)$ (V：頂点集合，E：辺集合)

マッチングとは？

G の**マッチング** (matching) とは，G の辺部分集合 $M \subseteq E$ で，
任意の頂点 $v \in V$ に対して，v に接続する M の辺が 1 つ以下であるもの



$\{a, b\}$ はマッチングではない

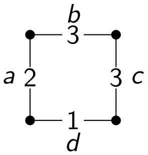


$\{a, c\}$ はマッチングである

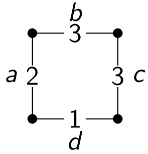
無向グラフ $G = (V, E)$ （V：頂点集合，E：辺集合）

最大重みマッチング

無向グラフ $G = (V, E)$ と各辺 $e \in E$ の重み $w(e)$ が与えられたとき，
G のマッチングの中で，重み和が最大のものを見つける問題

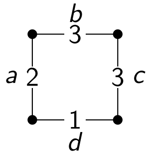


例 2：最大重みマッチング問題 — マッチングであるかないか (1)



$\{a, b, c, d\}$ はマッチングか　→ マッチングではない
$\{a, b, c\}$ はマッチングか　→ マッチングではない
$\{a, b, d\}$ はマッチングか　→ マッチングではない
$\{a, c, d\}$ はマッチングか　→ マッチングではない
$\{b, c, d\}$ はマッチングか　→ マッチングではない
$\{a, b\}$ はマッチングか　→ マッチングではない
$\{a, c\}$ はマッチングか　→ マッチングである
$\{a, d\}$ はマッチングか　→ マッチングではない

例 2：最大重みマッチング問題 — マッチングであるかないか (2)



$\{b, c\}$ はマッチングか → マッチングではない

$\{b, d\}$ はマッチングか → マッチングである

$\{c, d\}$ はマッチングか → マッチングではない

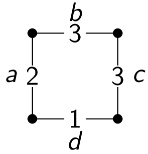
$\{a\}$ はマッチングか → マッチングである

$\{b\}$ はマッチングか → マッチングである

$\{c\}$ はマッチングか → マッチングである

$\{d\}$ はマッチングか → マッチングである

$\emptyset$ はマッチングか → マッチングである

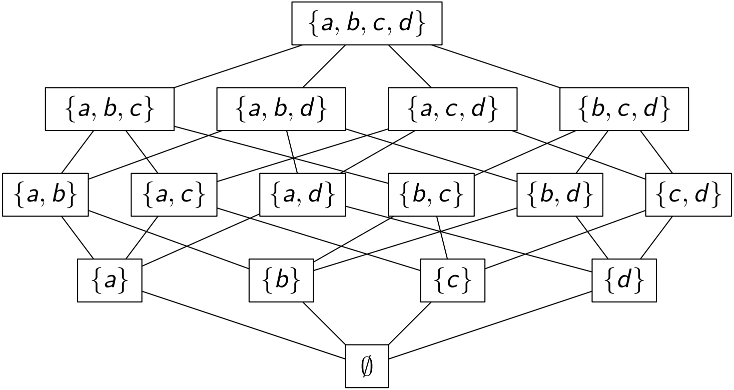


- この問題の許容集合は

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

- $\mathcal{F}$ の中で重み和が最も大きいものを選びたい (目的は最大化)

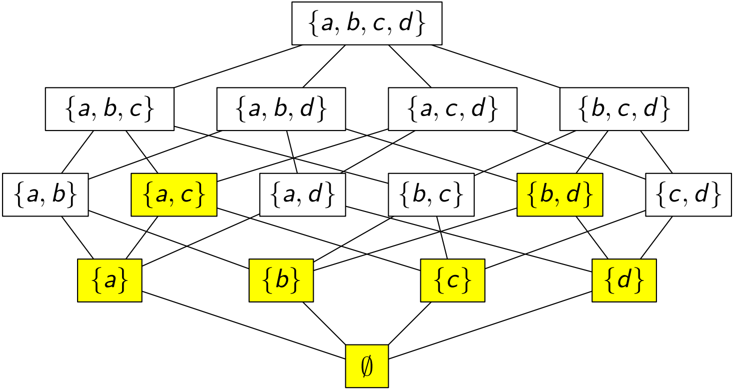
例 2：最大重みマッチング問題 — 許容集合 (図示)



$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

ハッセ図 (Hasse diagram)

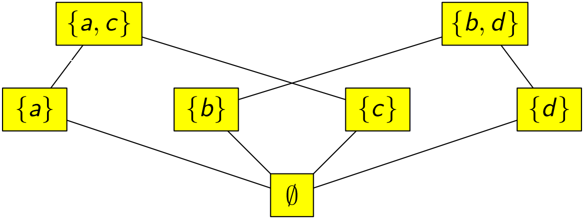
$\mathcal{F}$ の要素を黄色で表している



$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

ハッセ図 (Hasse diagram)

$\mathcal{F}$ の要素を黄色で表している



$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$$

ハッセ図 (Hasse diagram)

組合せ最適化問題：設定

- 非空な有限集合 E
- 有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$
- 重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}_+$

2^E は E の冪集合，$\mathbb{R}_+$ は非負実数全体の集合

組合せ最適化問題：定義

次のような X を見つける問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{F} \end{array}$$

組合せ最適化問題：設定

- 非空な有限集合 E 　台集合 (ground set)
- 有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ 　許容集合 (feasible set)
- 重み関数 $w \colon E \to \mathbb{R}_+$

2^E は E の冪集合，$\mathbb{R}_+$ は非負実数全体の集合

組合せ最適化問題：定義

次のような X を見つける問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\
\text{subject to} & X \in \mathcal{F}
\end{array}
$$

組合せ最適化問題：定義

次のような X を見つける問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{F} \end{array}$$

- $\displaystyle\sum_{e \in X} w(e)$ 目的関数 (objective function)
- $X \in \mathcal{F}$ という条件 制約 (constraint)
- $X \in \mathcal{F}$ という条件を満たす X 許容解 (feasible solution)

組合せ最適化問題：定義

次のような X を見つける問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{F} \end{array}$$

最適解 (optimal solution) とは？

上の問題の**最適解**とは，$X^* \in \mathcal{F}$ で，次を満たすもののこと

$$\text{任意の } X \in \mathcal{F} \text{ に対して，} \sum_{e \in X^*} w(e) \geq \sum_{e \in X} w(e)$$

つまり，組合せ最適化では，最適解を見つけたい

組合せ最適化問題：定義

次のような X を見つける問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{F} \end{array}$$

最適値 (optimal value) とは？

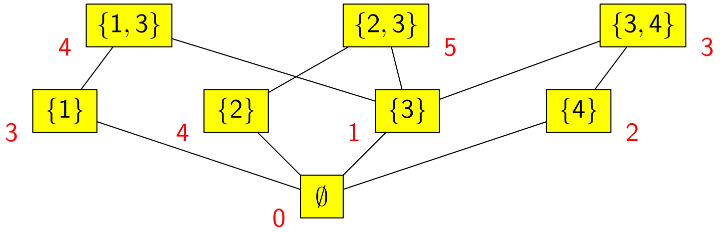
上の問題の最適値とは，最適解の目的関数値

$\boxed{\text{注}}$:「最適解」と「最適値」は異なる概念

例 1：ナップサック問題 — 最適解と最適値

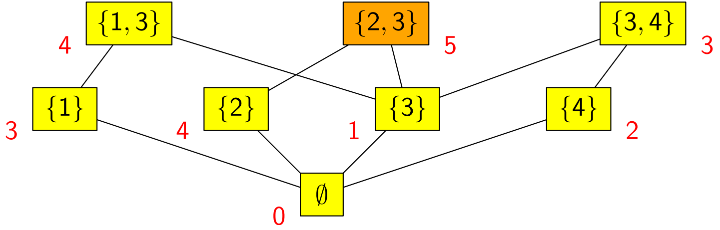
商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

赤字が収入 (つまり目的関数値) を表す

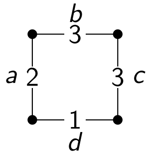


商品	1	2	3	4
収入 [万円]	3	4	1	2
重さ [kg]	2	3	1	3

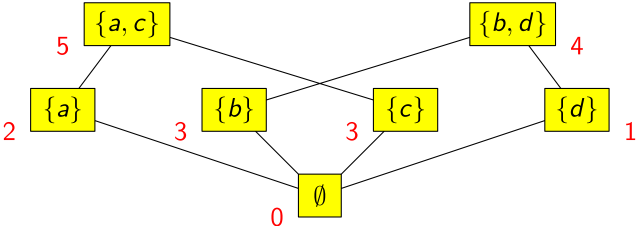
赤字が収入 (つまり目的関数値) を表す



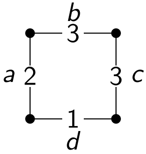
$\{2,3\}$ は最適解であり，最適値は 5



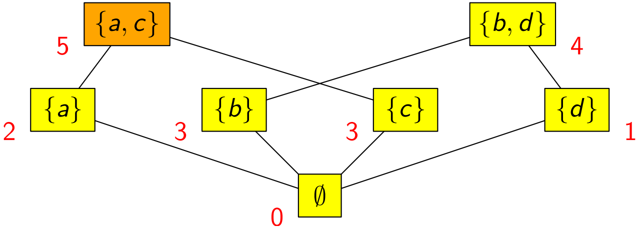
赤字が収入 (つまり目的関数値) を表す



例 2：最大重みマッチング問題 — 最適解と最適値



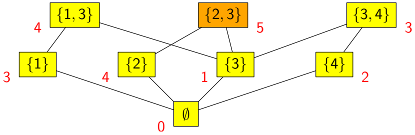
赤字が収入 (つまり目的関数値) を表す

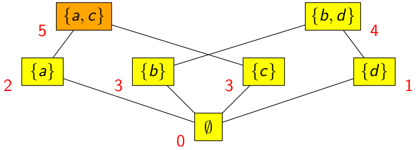


$\{a, c\}$ は最適解であり，最適値は 5

目次

問：2 つの例に共通することは？





どちらの例でも次の性質が成り立っている

$$X \in \mathcal{F} \text{ かつ } Y \subseteq X \quad \text{ならば } Y \in \mathcal{F}$$

(日本語訳：X が許容解であるならば，その部分集合 Y も許容解である)

この性質を持つ $\mathcal{F}$ が組合せ最適化には頻出する

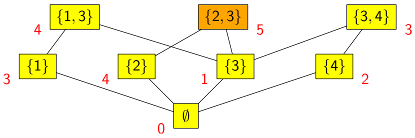
- ということなので，名前を付ける

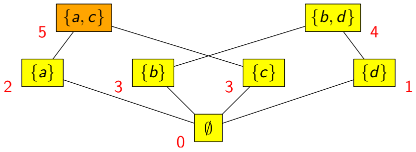
非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

独立集合族 (independence system) とは？

$\mathcal{F}$ が E 上の独立集合族であるとは，以下の 2 つを満たすこと

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{F}$





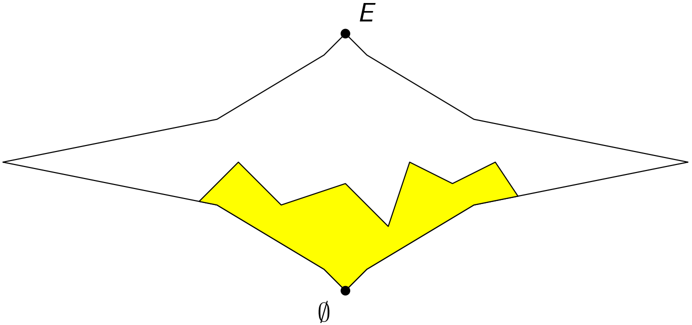
抽象単体複体 (abstract simplicial complex) と呼ばれることもある

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

独立集合族 (independence system) とは？

$\mathcal{F}$ が E 上の独立集合族であるとは，以下の 2 つを満たすこと

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{F}$



目次

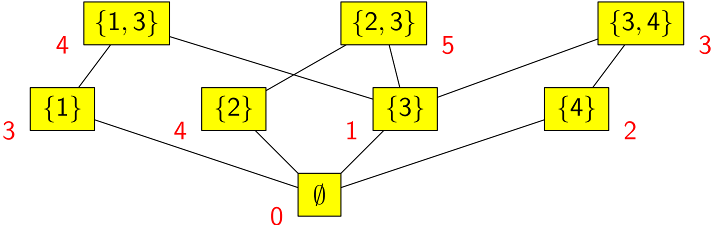
非空な有限集合 E，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

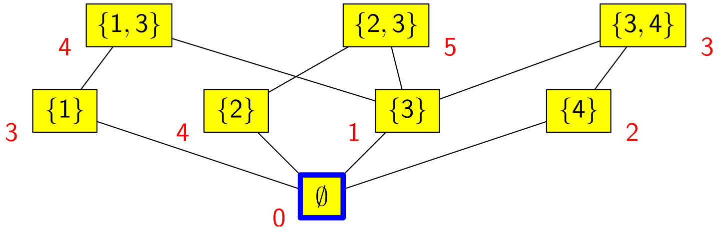
解くべき問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{F} \end{array}$$

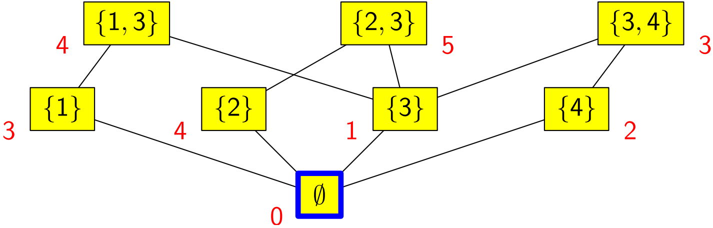
考えやすいアルゴリズム (の 1 つ)

- 貪欲アルゴリズム (greedy algorithm)

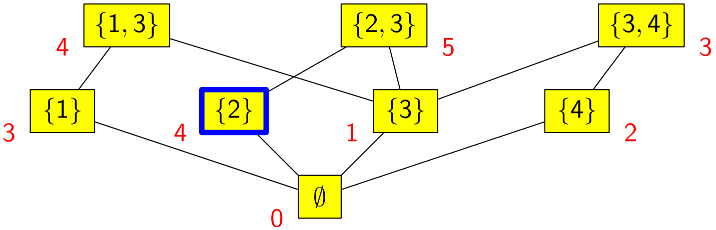

$\{1,3\}$
$\{2,3\}$
$\{3,4\}$
4
5
3
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{3\}$
$\{4\}$
3
4
1
2
$\emptyset$
0



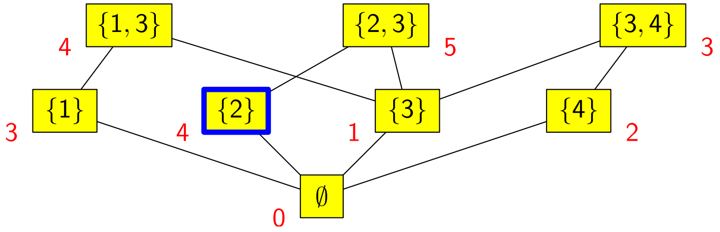
まず，$\emptyset$ からスタート



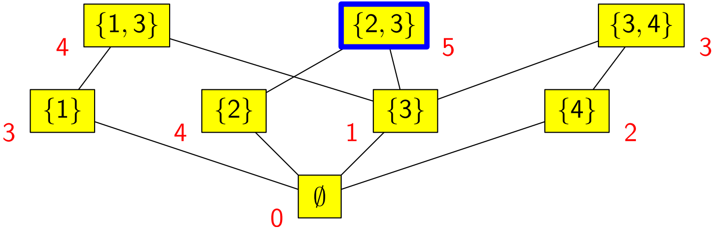
目的関数値が最も大きくなる「一歩」を踏み出す



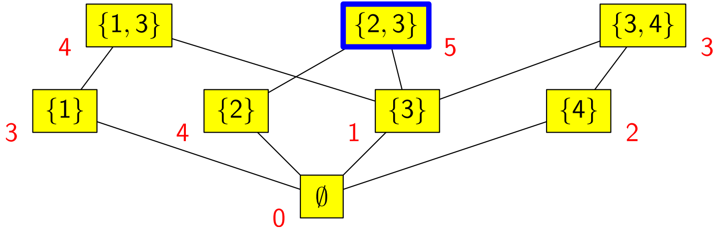
目的関数値が最も大きくなる「一歩」を踏み出す



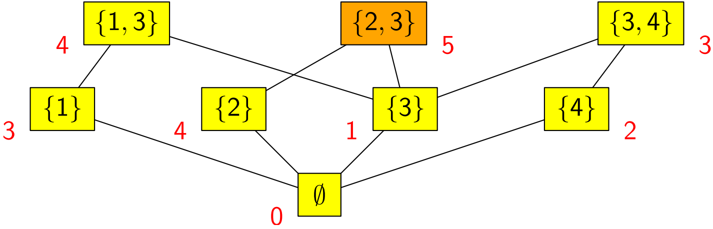
目的関数値が最も大きくなる「一歩」を踏み出す



目的関数値が最も大きくなる「一歩」を踏み出す

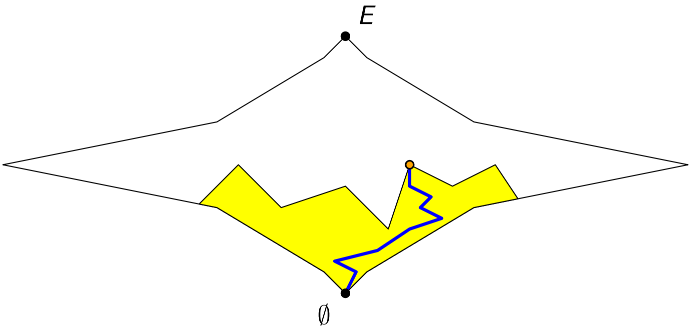


それ以上進めなくなったら終了



それ以上進めなくなったら終了

貪欲アルゴリズム：イメージ



非空な有限集合 E，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

貪欲アルゴリズム

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. 次を満たす $x \in E - X$ を見つける
   - $X \cup \{x\} \in \mathcal{F}$
   - $X \cup \{y\} \in \mathcal{F}$ を満たす任意の $y \in E - X$ に対して，
   $$w(x) \geq w(y)$$
3. そのような x が無ければ，X を出力し，終了
4. あれば，$X \leftarrow X \cup \{x\}$ として，2 に戻る

非空な有限集合 E，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

定理

次の 2 つは同値

1. 任意の重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して，貪欲アルゴリズムが最適解を出力する
2. 独立集合族 $\mathcal{F}$ がマトロイドである

つまり，

- マトロイド (matroid) とは特殊な性質を持つ独立集合族
- マトロイドに対しては，貪欲アルゴリズムが必ず最適解を出力する

$\rightsquigarrow$ マトロイドはとても性質のよい独立集合族

目次

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか？

$\rightsquigarrow$ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答

よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の重要概念

- 組合せ最適化問題
  - 台集合，許容集合，許容解，目的関数，最適解，最適値
- 独立集合族 (とそのイメージ)
- 貪欲アルゴリズム
- マトロイドは (まだ定義してないけど) とてもよい独立集合族であるということ

次回の予告

- マトロイドの定義と例

次回以降，前半の流れ (第 7 回まで)

- マトロイドと最小全域木問題の関係
  (貪欲アルゴリズム = Kruskal のアルゴリズム)
- 定理の証明

ここまでが，マトロイドの基礎

後半 (第 8 回以降)

- 「マトロイド交わり定理」の証明とアルゴリズム

これは二部グラフの最大マッチングなどに関係

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次