

離散最適化基礎論 第 12 回
マトロイドの合併岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2016 年 1 月 29 日

最終更新 : 2016 年 8 月 23 日 11:58

★ 休講 (卒研準備発表会)	(10/2)
1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割	(10/9)
★ 休講 (海外出張)	(10/16)
2 マトロイドの定義と例	(10/23)
3 マトロイドの基と階数関数	(10/30)
4 グラフとマトロイド	(11/6)
5 マトロイドとグラフの全域木	(11/13)
★ 休講 (調布祭)	(11/20)
6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム	(11/27)
7 マトロイドのサーキット	(12/4)

スケジュール 後半 (予定)

★ 休講 (国内出張)	(12/11)
8 マトロイドに対する操作	(12/18)
9 マトロイドの交わり	(12/25)
★ 冬季休業	(1/1)
10 マトロイド交わり定理	(1/8)
★ 休講 (センター試験準備)	(1/15)
11 マトロイド交わり定理 : アルゴリズム	(1/22)
12 最近のトピック: マトロイドの合併	(1/29)
★ 授業等調整日 (予備日)	(2/5)
★ 期末試験	(2/12)

注意 : 予定の変更もありうる

期末試験

- ▶ 日時 : 2 月 12 日 (金) 4 限
- ▶ 教室 : 西 5 号館 214 教室
- ▶ 範囲 : 第 1 回講義のはじめ から 第 10 回講義のおわり まで (第 11 回と第 12 回は含まない)
- ▶ 出題形式
 - ▶ 演習問題と同じ形式の問題を 6 題出題する
 - ▶ その中の 3 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし、「発展」として提示された演習問題は出題されない)
 - ▶ 全問に解答する
- ▶ 配点 : 1 題 20 点満点, 計 120 点満点
- ▶ 成績において, 100 点以上は 100 点で打ち切り
- ▶ 持ち込み : A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

テーマ : 解きやすい組合せ最適化問題を持つ「共通の性質」

疑問

どうしてそのような違いが生まれるのか?

→ 解きやすい問題を持つ「共通の性質」は何か?

回答

よく分かっていない

しかし, 部分的な回答はある

部分的な回答

問題が「マトロイドの構造」を持つと解きやすい

ポイント

効率的なアルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では, その一端に触れたい

目次

- 1 マトロイドの合併 : 復習
- 2 マトロイドの合併とマトロイドの交わり
- 3 今日のまとめ

マトロイドの直和・合併

非空な有限集合 E , 2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併 (union) とは? (復習)

 \mathcal{I}_1 と \mathcal{I}_2 の合併とは, 次の集合族 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset\}$$

非空な有限集合 E_1, E_2 , $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和 (direct sum) とは? (復習)

 \mathcal{I}_1 と \mathcal{I}_2 の直和とは, 次の集合族 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

合併と直和は似ているが, 少し違う

マトロイドの合併・直和はマトロイド

非空な有限集合 E , 2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

マトロイドの合併はマトロイド

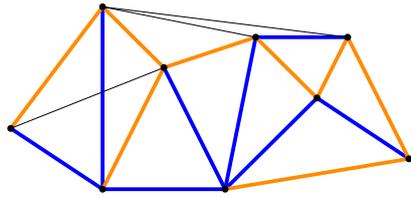
マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ は E 上のマトロイド非空な有限集合 E_1, E_2 , $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, 2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の直和は $E_1 \cup E_2$ 上のマトロイド

辺素な2つの全域木を見つける問題は

閉路マトロイドと閉路マトロイドの合併でモデル化できる



辺素：辺集合が互いに素

辺素な2つの全域木を見つける問題は

閉路マトロイドと閉路マトロイドの合併でモデル化できる

無向グラフ $G = (V, E)$ 上の閉路マトロイドを \mathcal{I} として

次の問題を考える

貪欲アルゴリズムで解ける ???

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && |X| \\ & \text{subject to} && X \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \end{aligned}$$

観察

最適値 = $2(|V| - 1) \iff G$ が辺素な2つの全域木を持つ

辺素な全域木：貪欲アルゴリズム？

次の問題を考える

貪欲アルゴリズムで解ける ???

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && |X| \\ & \text{subject to} && X \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \end{aligned}$$

貪欲アルゴリズム

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする

- 1 $X \leftarrow \emptyset$
- 2 すべての $i \leftarrow 1, 2, \dots, n$ に対して、以下を繰り返し

$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \end{cases}$$
- 3 X を出力

辺素な全域木：貪欲アルゴリズム？ (2)

貪欲アルゴリズム

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする

- 1 $X \leftarrow \emptyset$
- 2 すべての $i \leftarrow 1, 2, \dots, n$ に対して、以下を繰り返し

$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I} \vee \mathcal{I} \text{ のとき}) \end{cases}$$
- 3 X を出力

問題点

「 $X \cup \{e_i\} \in \mathcal{I} \vee \mathcal{I}$ 」の条件判定をどのように行うのか？

自明ではない \rightsquigarrow 実は、「マトロイドの交わり」を使うと効率よく行える

目次

- 1 マトロイドの合併：復習
- 2 マトロイドの合併とマトロイドの交わり
- 3 今日のまとめ

マトロイドの合併とマトロイドの交わり (1)

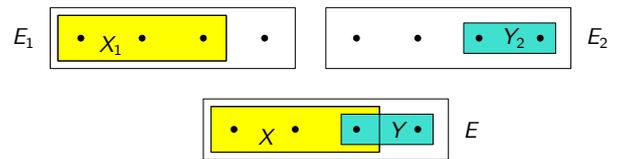
非空な有限集合 E , 2つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

考えること

合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ をマトロイドの交わりとして表現すること

そのために考える設定

- ▶ $E_1 = \{(e, 1) \mid e \in E\}, E_2 = \{(e, 2) \mid e \in E\},$
 $\mathcal{I}'_1 = \{X' \mid \text{ある } X \in \mathcal{I}_1 \text{ に対して, } X' = \{(e, 1) \mid e \in X\}\},$
 $\mathcal{I}'_2 = \{X' \mid \text{ある } X \in \mathcal{I}_2 \text{ に対して, } X' = \{(e, 2) \mid e \in X\}\}$
- ▶ $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ であり, $\mathcal{I}'_1, \mathcal{I}'_2$ はそれぞれ E_1, E_2 上のマトロイド
- ▶ $\mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2$ は $E_1 \cup E_2$ 上のマトロイド \leftarrow **1つ目のマトロイド**



マトロイドの合併とマトロイドの交わり (2)

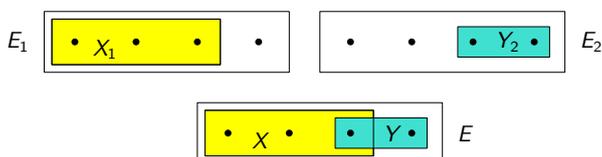
非空な有限集合 E , 2つのマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^E$

考えること

合併 $\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ をマトロイドの交わりとして表現すること

$E_1 \cup E_2$ 上の分割マトロイドで、次のもの考える \leftarrow **2つ目のマトロイド**

$$\mathcal{J} = \{X' \mid \{(e, 1), (e, 2)\} \not\subseteq X' \text{ for all } e \in E\}$$

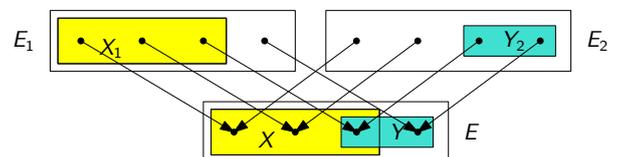


マトロイドの合併とマトロイドの交わり (3)

▶ 写像 $f: E_1 \cup E_2 \rightarrow E$ を次のように定義

$$\begin{aligned} & \text{任意の } (e, 1) \in E_1 \text{ に対して,} && f((e, 1)) = e, \\ & \text{任意の } (e, 2) \in E_2 \text{ に対して,} && f((e, 2)) = e \end{aligned}$$

▶ このとき, $\mathcal{I}_1 = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_1\}, \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in \mathcal{I}'_2\}$



証明したいこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}'_1 \oplus \mathcal{I}'_2) \cap \mathcal{J}\}$$

証明したいこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}\}$$

証明 (⊃) : $X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}$ として, $f(X')$ を考える

- ▶ **目標** : $f(X') \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ を導く
- ▶ $X' \in \mathcal{J}$ より, 各 $e \in E$ に対して $\{(e, 1), (e, 2)\} \not\subseteq X'$
- ▶ つまり,

$$X'_1 = \{(e, 1) \mid (e, 1) \in X'\}, \quad X'_2 = \{(e, 2) \mid (e, 2) \in X'\}$$

とすると

$$f(X') = f(X'_1) \cup f(X'_2) \quad \text{かつ} \quad f(X'_1) \cap f(X'_2) = \emptyset$$

- ▶ $f(X'_1) \in \mathcal{I}_1, f(X'_2) \in \mathcal{I}_2$ なので, $f(X') \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

証明したいこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}\}$$

証明 (⊆) : $X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ とする

- ▶ **目標** : ある $X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}$ に対して, $X = f(X')$
- ▶ $X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ より, ある $X_1 \in \mathcal{I}_1$ と $X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して

$$X = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

- ▶ このとき, $X'_1 = \{(e, 1) \mid e \in X_1\}, X'_2 = \{(e, 2) \mid e \in X_2\}$ とすると,

$$X_1 = f(X'_1), \quad X_2 = f(X'_2)$$

- ▶ さらに, $X'_1 \cup X'_2 \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}$
- ▶ つまり, $X' = X'_1 \cup X'_2$ とすれば,

$$X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}, \quad X = f(X')$$

□

マトロイドの合併とマトロイドの交わり：帰結

証明したこと

$$\mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2 = \{f(X') \mid X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2) \cap \mathcal{J}\}$$

帰結 : $X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ かどうか判定するには?

- 1 先に定義した $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{J}$ を考える
- 2 $X'_1 = \{(e, 1) \mid e \in X\}, X'_2 = \{(e, 2) \mid e \in X\}$ として, 制限 $\mathcal{I}_1|X'_1, \mathcal{I}_2|X'_2$ を考える
- * 注意 : $(\mathcal{I}_1|X'_1) \oplus (\mathcal{I}_2|X'_2) = (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2)|(X'_1 \cup X'_2)$
- 3 $\max\{|X'| \mid X' \in (\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2)|(X'_1 \cup X'_2) \cap \mathcal{J}\}$ を計算
- 4 この最大値が $|X|$ に等しければ, $X \in \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$ そうでなければ, $X \notin \mathcal{I}_1 \vee \mathcal{I}_2$

目次

- ① マトロイドの合併：復習
- ② マトロイドの合併とマトロイドの交わり
- ③ 今日のまとめ

残った時間の使い方

- ▶ 授業評価アンケート
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
 - ▶ 内容は何でも OK
 - ▶ 匿名で OK