離散最適化基礎論 第 8 回
マトロイドに対する操作

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 12 月 18 日

最終更新：2015 年 12 月 18 日　16:45

スケジュール 前半

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフとマトロイド (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

この講義では，その一端に触れたい

今日の目標

今日の目標
マトロイドから別のマトロイドを得る操作を使えるようになる

扱う操作
- 打ち切り
- 制限 (除去)
- 縮約
- 直和

マトロイドの定義：復習

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？
$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと
- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$
- (I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
  ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足
- (I1) と (I2) は $\mathcal{I}$ が独立集合族であることを意味する
- (I3) を増加公理 (augmentation property) と呼ぶことがある

用語
- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ

目次

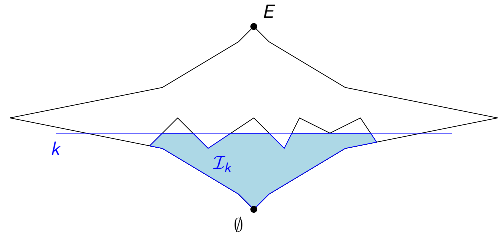
1 マトロイドの打ち切り
2 マトロイドの制限と除去
3 マトロイドの縮約
4 マトロイドの直和
5 今日のまとめ

マトロイドの打ち切り

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，自然数 $k \geq 0$

マトロイドの打ち切り (truncation) とは？
$\mathcal{I}$ の打ち切りとは，次の集合族 $\mathcal{I}_k$

$$\mathcal{I}_k = \{X \mid X \in \mathcal{I}, |X| \leq k\}$$



マトロイドの打ち切りはマトロイド

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，自然数 $k \geq 0$

命題：マトロイドの打ち切りはマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}$ の打ち切り $\mathcal{I}_k$ も E 上のマトロイドである

証明：$\mathcal{I}_k$ も (I1)，(I2)，(I3) を満たすことを確認すればよい

$\boxed{\mathcal{I}_k \text{ が (I1) を満たすことを確認する}}$

- (I1) より，$\emptyset \in \mathcal{I}$ であり，$|\emptyset| = 0 \leq k$
- したがって，$\emptyset \in \mathcal{I}_k$

マトロイドの打ち切りはマトロイド：続き

証明 (続き)：

$\boxed{\mathcal{I}_k \text{ が (I2) を満たすことを確認する}}$

- $X \in \mathcal{I}_k$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- $X \in \mathcal{I}_k$ より，$X \in \mathcal{I}$ かつ $|X| \leq k$
- $Y \subseteq X$ より，$|Y| \leq k$
- $Y \subseteq X$ と (I2) より，$Y \in \mathcal{I}$
- したがって，$Y \in \mathcal{I}_k$

$\boxed{\mathcal{I}_k \text{ が (I3) を満たすことを確認する}}$

- $X, Y \in \mathcal{I}_k$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- $X, Y \in \mathcal{I}_k$ より，$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X|, |Y| \leq k$
- $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ なので，(I3) より，ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- $|X| > |Y|$ と $|X| \leq k$ より，$|Y| \leq k - 1$
- したがって，$|Y \cup \{e\}| \leq (k-1) + 1 = k$
- つまり，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}_k$ □

マトロイドの打ち切りと一様マトロイド (1)

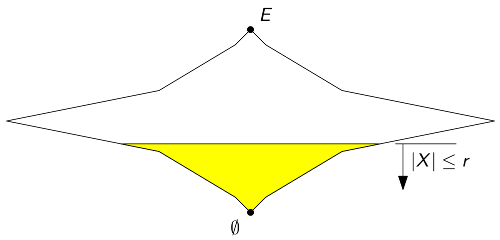
非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

一様マトロイドの定義 (復習)

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド (一様マトロイドと呼ばれる)



マトロイドの打ち切りと一様マトロイド (2)

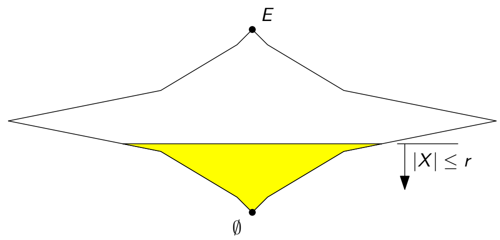
非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

観察：一様マトロイドはマトロイドの打ち切り

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ はマトロイド 2^E を r で打ち切ったもの



目次

1. マトロイドの打ち切り
2. マトロイドの制限と除去
3. マトロイドの縮約
4. マトロイドの直和
5. 今日のまとめ

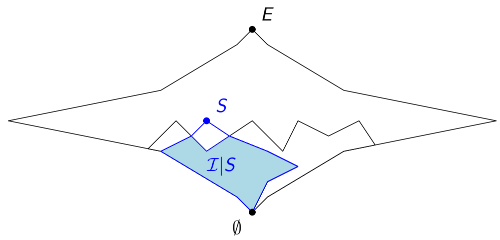
マトロイドの制限

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの制限 (restriction) とは？

$\mathcal{I}$ の制限とは，次の集合族 $\mathcal{I}|S$

$$\mathcal{I}|S = \{X \mid X \in \mathcal{I}, X \subseteq S\}$$



マトロイドの制限はマトロイド

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの制限はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}$ の制限 $\mathcal{I}|S$ は S 上のマトロイド

証明：$\mathcal{I}|S$ も (I1)，(I2)，(I3) を満たすことを確認すればよい

$\boxed{\mathcal{I}|S \text{ が (I1) を満たすことを確認する}}$

- (I1) より，$\emptyset \in \mathcal{I}$ であり，$\emptyset \subseteq S$
- したがって，$\emptyset \in \mathcal{I}|S$

マトロイドの制限はマトロイド：続き

証明 (続き)：

$\boxed{\mathcal{I}|S \text{ が (I2) を満たすことを確認する}}$

- $X \in \mathcal{I}|S$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- $X \in \mathcal{I}|S$ より，$X \in \mathcal{I}$ かつ $X \subseteq S$
- $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq S$ より，$Y \subseteq S$
- $Y \subseteq X$ と (I2) より，$Y \in \mathcal{I}$
- したがって，$Y \in \mathcal{I}|S$

$\boxed{\mathcal{I}|S \text{ が (I3) を満たすことを確認する}}$

- $X, Y \in \mathcal{I}|S$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- $X, Y \in \mathcal{I}|S$ より，$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $X, Y \subseteq S$
- $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ なので，(I3) より，ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- $e \in X \subseteq S$ なので，$e \in S$
- したがって，$Y \cup \{e\} \subseteq S$
- つまり，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}|S$ □

マトロイドの除去

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの除去 (deletion) とは？

$\mathcal{I}$ の除去とは，次の集合族 $\mathcal{I} \setminus S$

$$\mathcal{I} \setminus S = \{X - S \mid X \in \mathcal{I}\}$$

演習問題

マトロイド $\mathcal{I}$ の除去 $\mathcal{I} \setminus S$ は $E - S$ 上のマトロイド

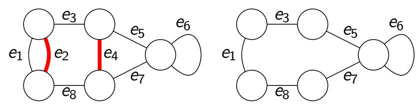
- 実際は，$\mathcal{I} \setminus S = \mathcal{I}|(E - S)$ となる

閉路マトロイドの制限・除去

グラフ $G = (V, E)$，辺部分集合 $S \subseteq E$

閉路マトロイドの除去

グラフ G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$ の除去 $\mathcal{I} \setminus S$ は，
グラフ $G - S$ の閉路マトロイド



$S = \{e_2, e_4\}$　　　　$G - S$

マトロイドの制限の階数関数

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，部分集合 $S \subseteq E$

マトロイドの制限 (restriction) とは？

$\mathcal{I}$ の制限とは，次の集合族 $\mathcal{I}|S$

$$\mathcal{I}|S = \{X \mid X \in \mathcal{I}, X \subseteq S\}$$

マトロイドの制限の階数関数 (演習問題)

$\mathcal{I}$ の階数関数を r とするとき，$\mathcal{I}|S$ の階数関数 r' は次のように書ける

任意の $X \subseteq S$ に対して，　$r'(X) = r(X)$

後の講義で，これを用いる予定

目次

1. マトロイドの打ち切り
2. マトロイドの制限と除去
3. マトロイドの縮約
4. マトロイドの直和
5. 今日のまとめ

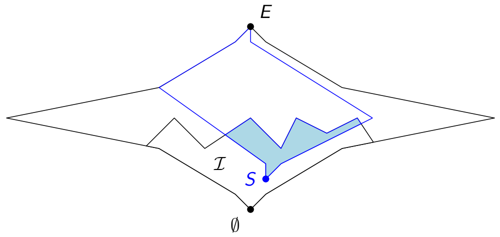
マトロイドの縮約

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，独立集合 $S \in \mathcal{I}$

マトロイドの縮約 (contraction) とは？

$\mathcal{I}$ の縮約とは，次の集合族 $\mathcal{I}/S$

$$\mathcal{I}/S = \{X \mid X \cup S \in \mathcal{I}, X \subseteq E - S\}$$



$S \notin \mathcal{I}$ のときにも縮約は定義できるが，上とは違う式で行われる

マトロイドの縮約はマトロイド

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，独立集合 $S \in \mathcal{I}$

マトロイドの縮約はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}$ の縮約 $\mathcal{I}/S$ は $E - S$ 上のマトロイド

証明：$\mathcal{I}/S$ も (I1)，(I2)，(I3) を満たすことを確認すればよい

$\mathcal{I}/S$ が (I1) を満たすことを確認する

- 仮定より，$\emptyset \cup S = S \in \mathcal{I}$
- $\emptyset \subseteq E - S$ なので，$\emptyset \in \mathcal{I}/S$

マトロイドの縮約はマトロイド：続き

証明 (続き)：

$\mathcal{I}/S$ が (I2) を満たすことを確認する

- $X \in \mathcal{I}/S$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- $X \in \mathcal{I}/S$ より，$X \cup S \in \mathcal{I}$ かつ $X \subseteq E - S$
- $Y \subseteq X$ かつ $X \subseteq E - S$ より，$Y \subseteq E - S$
- $Y \subseteq X$ より，$Y \cup S \subseteq X \cup S$ なので，(I2) より，$Y \cup S \in \mathcal{I}$
- したがって，$Y \in \mathcal{I}/S$

マトロイドの縮約はマトロイド：続き (2)

証明 (続き)：

$\mathcal{I}/S$ が (I3) を満たすことを確認する

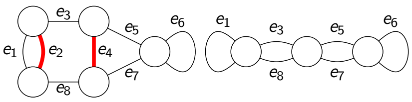
- $X, Y \in \mathcal{I}/S$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- $X, Y \in \mathcal{I}/S$ より，$X \cup S, Y \cup S \in \mathcal{I}$ かつ $X, Y \subseteq E - S$
- $X, Y \subseteq E - S$ より，$X \cap S, Y \cap S = \emptyset$
- これと $|X| > |Y|$ より，$|X \cup S| = |X| + |S| > |Y| + |S| = |Y \cup S|$
- $X \cup S, Y \cup S \in \mathcal{I}$ かつ $|X \cup S| > |Y \cup S|$ なので，(I3) より，ある $e \in (X \cup S) - (Y \cup S)$ が存在して，$(Y \cup S) \cup \{e\} \in \mathcal{I}$
- $X, Y \subseteq E - S$ なので，$(X \cup S) - (Y \cup S) = X - Y$ であり，$e \in X - Y$
- したがって，$Y \cup \{e\} \subseteq E - S$ であり，$(Y \cup \{e\}) \cup S = (Y \cup S) \cup \{e\}$
- つまり，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}/S$ □

閉路マトロイドの縮約

グラフ $G = (V, E)$，辺部分集合 $S \subseteq E$

閉路マトロイドの縮約

グラフ G の閉路マトロイド $\mathcal{I}$ の縮約 $\mathcal{I}/S$ は，
グラフ G/S の閉路マトロイド



$S = \{e_2, e_4\}$　　　　G/S

マトロイドの縮約の階数関数

非空な有限集合 E，マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$，独立集合 $S \in \mathcal{I}$

マトロイドの縮約 (contraction) とは？

$\mathcal{I}$ の縮約とは，次の集合族 $\mathcal{I}/S$

$$\mathcal{I}/S = \{X \mid X \cup S \in \mathcal{I}, X \subseteq E - S\}$$

マトロイドの縮約の階数関数　(演習問題)

$\mathcal{I}$ の階数関数を r とするとき，$\mathcal{I}/S$ の階数関数 r' は次のように書ける

任意の $X \subseteq E - S$ に対して， $r'(X) = r(X \cup S) - r(S)$

後の講義で，これを用いる予定

目次

1. マトロイドの打ち切り
2. マトロイドの制限と除去
3. マトロイドの縮約
4. マトロイドの直和
5. 今日のまとめ

マトロイドの直和

非空な有限集合 E_1, E_2，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和 (direct sum) とは？

$\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ の直和とは，次の集合族 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

$$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \{X_1 \cup X_2 \mid X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2\}$$

マトロイドの直和はマトロイド

非空な有限集合 E_1, E_2，$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，2 つのマトロイド $\mathcal{I}_1 \subseteq 2^{E_1}, \mathcal{I}_2 \subseteq 2^{E_2}$

マトロイドの直和はマトロイド

マトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の直和 $\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ もマトロイド

証明：$\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ も (I1)，(I2)，(I3) を満たすことを確認すればよい

$\boxed{\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \text{ が (I1) を満たすことを確認する}}$

- (I1) より，$\emptyset \in \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ である
- $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ なので，$\emptyset \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

マトロイドの直和はマトロイド：続き

証明 (続き)：

$\boxed{\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \text{ が (I2) を満たすことを確認する}}$

- $X \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ かつ $Y \subseteq X$ であると仮定
- ある $X_1 \in \mathcal{I}_1$ と $X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して，$X = X_1 \cup X_2$
- $\therefore$ ある $Y_1 \subseteq X_1$ と $Y_2 \subseteq X_2$ が存在して， $Y = Y_1 \cup Y_2$
- (I2) より， $Y_1 \in \mathcal{I}_1$， $Y_2 \in \mathcal{I}_2$
- したがって， $Y \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$

マトロイドの直和はマトロイド：続き (2)

証明 (続き)：

$\boxed{\mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 \text{ が (I3) を満たすことを確認する}}$

- $X, Y \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ かつ $|X| > |Y|$ であると仮定
- $X \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ より，ある $X_1 \in \mathcal{I}_1$ と $X_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して，$X = X_1 \cup X_2$
- 同様に，ある $Y_1 \in \mathcal{I}_1$ と $Y_2 \in \mathcal{I}_2$ が存在して，$Y = Y_1 \cup Y_2$
- $X_1 \in \mathcal{I}_1, X_2 \in \mathcal{I}_2$ で， $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ より， $X_1 \cap X_2 = \emptyset$
- 同様に， $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$
- したがって，$|X| = |X_1| + |X_2|$， $|Y| = |Y_1| + |Y_2|$
- $|X| > |Y|$ より， $|X_1| > |Y_1|$ または $|X_2| > |Y_2|$ が成り立つ
- $|X_1| > |Y_1|$ が成り立つとする ($|X_2| > |Y_2|$ の場合も同様になる)
- $X_1, Y_1 \in \mathcal{I}_1$ と (I3) より，ある $e \in X_1 - Y_1$ が存在して，
  $Y_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1$
- $\therefore Y \cup \{e\} = (Y_1 \cup Y_2) \cup \{e\} = (Y_1 \cup \{e\}) \cup Y_2 \in \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2$ □

マトロイドの直和と分割マトロイド (1)

非空な有限集合 E，集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$，
自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 0$

命題　(証明は後の講義で行う，と第 2 回で述べた)

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid$ 任意の $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して， $|X \cap E_i| \leq r_i\}$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

- E 上の分割マトロイド (partition matroid) と呼ばれる

例

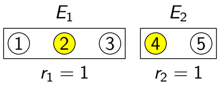
$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{4, 5\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ のとき

$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$

マトロイドの直和と分割マトロイド (2)

例

$E = \{1,2,3,4,5\}$, $E_1 = \{1,2,3\}$, $E_2 = \{4,5\}$, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ のとき
$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$



直感：$\mathcal{I}$ の要素を作るとき，E_i から高々 r_i 個の要素を選ぶ

この例において

$$\mathcal{I} = U_{1,3} \oplus U_{1,2}$$

マトロイドの直和と分割マトロイド (3)

非空な有限集合 E，集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$，
自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 0$

命題 (証明は後の講義で行う，と第 2 回で述べた)

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid \text{任意の } i \in \{1,\ldots,k\} \text{ に対して，} |X \cap E_i| \leq r_i\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

$n_i = |E_i|$ とすると

$$\mathcal{I} = U_{r_1,n_1} \oplus U_{r_2,n_2} \oplus \cdots \oplus U_{r_k,n_k}$$

と表すことができる

帰結

つまり，分割マトロイドはマトロイド □

目次

1. マトロイドの打ち切り
2. マトロイドの制限と除去
3. マトロイドの縮約
4. マトロイドの直和
5. 今日のまとめ

今回のまとめ

今日の目標

マトロイドから別のマトロイドを得る操作を使えるようになる

扱う操作
- 打ち切り
- 制限 (除去)
- 縮約
- 直和

次回

マトロイドに対する別の操作
- マトロイドの交わり：マトロイドであるとは限らない
- マトロイドの合併：必ずマトロイドになる

この 2 つは応用上，とても重要

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK