離散最適化基礎論 第 2 回
マトロイドの定義と例

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 10 月 23 日

最終更新：2015 年 10 月 26 日　04:11

スケジュール 前半 (予定)

- ⋆ 休講 (卒研準備発表会) (10/2)
- 1 組合せ最適化問題におけるマトロイドの役割 (10/9)
- ⋆ 休講 (海外出張) (10/16)
- 2 マトロイドの定義と例 (10/23)
- 3 マトロイドの基と階数関数 (10/30)
- 4 グラフの全域木 (11/6)
- 5 マトロイドとグラフの全域木 (11/13)
- ⋆ 休講 (調布祭) (11/20)
- 6 マトロイドに対する貪欲アルゴリズム (11/27)
- 7 マトロイドのサーキット (12/4)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

- ⋆ 休講 (国内出張) (12/11)
- 8 マトロイドに対する操作 (12/18)
- 9 マトロイドの交わり (12/25)
- ⋆ 冬季休業 (1/1)
- 10 マトロイド交わり定理 (1/8)
- ⋆ 休講 (センター試験準備) (1/15)
- 11 マトロイド交わり定理：アルゴリズム (1/22)
- 12 最近のトピック (1/29)
- ⋆ 授業等調整日 (予備日) (2/5)
- ⋆ 期末試験 (2/12?)

注意：予定の変更もありうる

テーマ：解きやすい組合せ最適化問題が持つ「共通の性質」

疑問
どうしてそのような違いが生まれるのか？

⇝ 解きやすい問題が持つ「共通の性質」は何か？

回答
よく分かっていない

しかし，部分的な回答はある

部分的な回答
問題が「マトロイド的構造」を持つと解きやすい

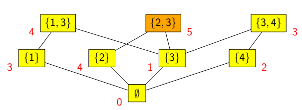
ポイント
効率的アルゴリズムが設計できる背景に「美しい数理構造」がある

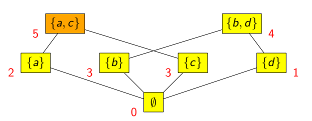
この講義では，その一端に触れたい

独立集合族：定義

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

独立集合族 (independence system) とは？
$\mathcal{F}$ が E 上の独立集合族であるとは，以下の 2 つを満たすこと
1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{F}$

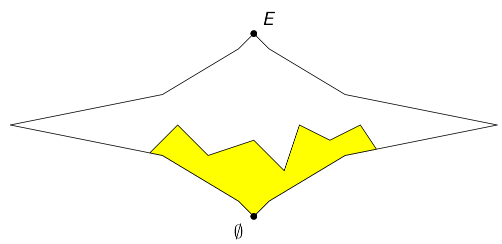




独立集合族：イメージ

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

独立集合族 (independence system) とは？
$\mathcal{F}$ が E 上の独立集合族であるとは，以下の 2 つを満たすこと
1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{F}$



独立集合族とアルゴリズム

非空な有限集合 E，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

解くべき問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{F} \end{array}$$

考えやすいアルゴリズム (の 1 つ)
- 貪欲アルゴリズム (greedy algorithm)

マトロイドと貪欲アルゴリズム

非空な有限集合 E，独立集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^E$

定理
次の 2 つは同値
1. 任意の重み関数 $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して，貪欲アルゴリズムが最適解を出力する
2. 独立集合族 $\mathcal{F}$ がマトロイドである

つまり，
- マトロイド (matroid) とは特殊な性質を持つ独立集合族
- マトロイドに対しては，貪欲アルゴリズムが必ず最適解を出力する

⇝ マトロイドはとても性質のよい独立集合族

目次

マトロイドの定義

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

補足

- (I1) と (I2) は $\mathcal{I}$ が独立集合族であることを意味する
- (I3) を増加公理 (augmentation property) と呼ぶことがある

用語

- $\mathcal{I}$ の要素である集合 $X \in \mathcal{I}$ を，このマトロイドの独立集合と呼ぶ

マトロイドの定義：例 1

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

例 1：$E = \{1, 2, 3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ は E 上のマトロイドではない (なぜか？)

マトロイドの定義：例 1

例 1：$E = \{1, 2, 3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

なぜならば，この $\mathcal{I}$ は (I2) を満たさないから

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

実際，$X = \{2, 3\}, Y = \{2\}$ とすると，

$$X \in \mathcal{I} \text{ かつ } Y \subseteq X \text{ であるが，} Y \in \mathcal{I} \text{ ではない}$$

マトロイドの定義：例 2

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

例 2：$E = \{1, 2, 3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ は E 上のマトロイドではない (なぜか？)

マトロイドの定義：例 2

例 2：$E = \{1, 2, 3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

なぜならば，この $\mathcal{I}$ は (I3) を満たさないから

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

実際，$X = \{1, 3\}, Y = \{2\}$ とすると，
$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ であり，$X - Y = \{1, 3\}$ であるが，
$e = 1 \in X - Y$ に対して，$Y \cup \{e\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{I}$ であり，
$e = 3 \in X - Y$ に対して，$Y \cup \{e\} = \{2, 3\} \notin \mathcal{I}$ である
すなわち，$X = \{1, 3\}, Y = \{2\}$ とすると，
$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となる $e \in X - Y$ が存在しない

マトロイドの定義：例 3

非空な有限集合 E，有限集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

例 3：$E = \{1, 2, 3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ は E 上のマトロイドである (なぜか？)

マトロイドの定義：例 3 — (I1) を満たすこと

例 3：$E = \{1, 2, 3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I1) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

たしかに，$\emptyset \in \mathcal{I}$ なので，この $\mathcal{I}$ は (I1) を満たす

マトロイドの定義：例 3 — (I2) を満たすこと

例 3：$E = \{1,2,3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I2) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

前提「$X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$」を満たすすべての X, Y を考える

- $X = \emptyset$，$Y = \emptyset$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{1\}$，$Y = \emptyset$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{1\}$，$Y = \{1\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{2\}$，$Y = \emptyset$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{2\}$，$Y = \{2\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{3\}$，$Y = \emptyset$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{3\}$，$Y = \{3\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす

次ページに続く

マトロイドの定義：例 3 — (I2) を満たすこと (続き)

例 3：$E = \{1,2,3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I2) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

前提「$X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$」を満たすすべての X, Y を考える (続き)

- $X = \{1,3\}$，$Y = \emptyset$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{1,3\}$，$Y = \{1\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{1,3\}$，$Y = \{3\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{1,3\}$，$Y = \{1,3\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{2,3\}$，$Y = \emptyset$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{2,3\}$，$Y = \{2\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{2,3\}$，$Y = \{3\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす
- $X = \{2,3\}$，$Y = \{2,3\}$　このとき，$Y \in \mathcal{I}$ を満たす

マトロイドの定義：例 3 — (I3) を満たすこと

例 3：$E = \{1,2,3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I3) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

前提「$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$」を満たすすべての X, Y を考える

- $X = \{1\}$，$Y = \emptyset$
  このとき，$e = 1 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{1\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{2\}$，$Y = \emptyset$
  このとき，$e = 2 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{2\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{3\}$，$Y = \emptyset$
  このとき，$e = 3 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{3\} \in \mathcal{I}$

次ページに続く

マトロイドの定義：例 3 — (I3) を満たすこと (続き 1)

例 3：$E = \{1,2,3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I3) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

前提「$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$」を満たすすべての X, Y を考える (続き)

- $X = \{1,3\}$，$Y = \emptyset$
  このとき，$e = 1 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{1\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{1,3\}$，$Y = \{1\}$
  このとき，$e = 3 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{1,3\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{1,3\}$，$Y = \{2\}$
  このとき，$e = 3 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{2,3\} \in \mathcal{I}$

次ページに続く

マトロイドの定義：例 3 — (I3) を満たすこと (続き 2)

例 3：$E = \{1,2,3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I3) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

前提「$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$」を満たすすべての X, Y を考える (続き)

- $X = \{1,3\}$，$Y = \{3\}$
  このとき，$e = 1 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{1,3\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{2,3\}$，$Y = \emptyset$
  このとき，$e = 2 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{2\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{2,3\}$，$Y = \{1\}$
  このとき，$e = 3 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{1,3\} \in \mathcal{I}$

次ページに続く

マトロイドの定義：例 3 — (I3) を満たすこと (続き 3)

例 3：$E = \{1,2,3\}$ で，

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

この $\mathcal{I}$ が (I3) を満たすことを確認する

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであるための条件

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

前提「$X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$」を満たすすべての X, Y を考える (続き)

- $X = \{2,3\}$，$Y = \{2\}$
  このとき，$e = 3 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{2,3\} \in \mathcal{I}$
- $X = \{2,3\}$，$Y = \{3\}$
  このとき，$e = 2 \in X - Y$ とすると，$Y \cup \{e\} = \{2,3\} \in \mathcal{I}$

目次

一様マトロイド

非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

- E 上の一様マトロイド (uniform matroid) と呼ばれる
- $|E| = n$ のとき，$U_{r,n}$ と書かれることもある

例

$E = \{1,2,3,4\}$，$r = 2$ のとき

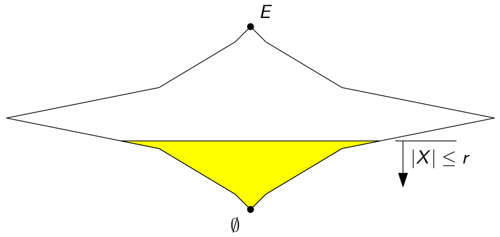
$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

一様マトロイド：イメージ

非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド



一様マトロイド：証明に向けて

非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

証明：この $\mathcal{I}$ が (I1), (I2), (I3) を満たすことを確認すればよい

マトロイドとは？

$\mathcal{I}$ が E 上のマトロイド (matroid) であるとは，次の 3 条件を満たすこと

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I2) $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subseteq X$ ならば，$Y \in \mathcal{I}$

(I3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ ならば，
ある $e \in X - Y$ が存在して，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

一様マトロイド：証明 (I1)

非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

(I1) の証明：
- 空集合 $\emptyset$ を考える
- $|\emptyset| = 0 \leq r$
- したがって，$\emptyset \in \mathcal{I}$ □

一様マトロイド：証明 (I2)

非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

(I2) の証明：
- X, Y が $X \in \mathcal{I}$ と $Y \subseteq X$ を満たすと仮定する
- $X \in \mathcal{I}$ より，$|X| \leq r$ .... (a)
- $Y \subseteq X$ より，$|Y| \leq |X|$ .... (b)
- (a) と (b) より，$|Y| \leq r$
- したがって，$Y \in \mathcal{I}$ □

一様マトロイド：証明 (I3)

非空な有限集合 E，自然数 $r \geq 0$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

(I3) の証明：
- X, Y が $X, Y \in \mathcal{I}$ と $|X| > |Y|$ を満たすと仮定する
- $X \in \mathcal{I}$ より，$|Y| < |X| \leq r$
- したがって，$|Y| \leq r - 1$
- 任意の $e \in X - Y$ を考えると，$|Y \cup \{e\}| = |Y| + 1 \leq (r-1) + 1 = r$
- したがって，$Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ □

分割マトロイド

非空な有限集合 E，集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$，
自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 0$

命題 (証明は後の講義で行う)

有限集合族 $\mathcal{I}$ を
$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid \text{任意の } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ に対して，} |X \cap E_i| \leq r_i\}$$
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

- E 上の分割マトロイド (partition matroid) と呼ばれる

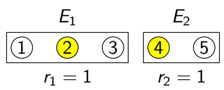
例

$E = \{1,2,3,4,5\}$，$E_1 = \{1,2,3\}$，$E_2 = \{4,5\}$，$r_1 = 1$，$r_2 = 1$ のとき
$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$

分割マトロイド：直感

例

$E = \{1,2,3,4,5\}$，$E_1 = \{1,2,3\}$，$E_2 = \{4,5\}$，$r_1 = 1$，$r_2 = 1$ のとき
$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$



直感：$\mathcal{I}$ の要素を作るとき，E_i から高々 r_i 個の要素を選ぶ

目次

線形代数の復習：線形結合 (一次結合)

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$

線形結合とは？

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ の線形結合とは，実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$

と書けるベクトルのこと

総和記号を用いれば，$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{a}_i$ と書ける

線形代数の復習：線形独立性 (一次独立性)

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$

線形結合とは？

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であるとは，
任意の実数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

が成り立つこと

- 集合 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ が線形独立であるとも言う
- $\emptyset$ は線形独立であると見なす (そうであると定義する)

線形代数の復習：複数のベクトルの張る空間，線形部分空間

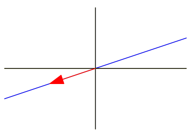
ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$，$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

ベクトルが張る空間とは？

A が張る空間とは A のベクトルの線形結合全体

$$\langle A \rangle = \{\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$$

このように書ける集合のことを $\mathbb{R}^m$ の線形部分空間と呼ぶ
($\mathbb{R}^m$ の線形部分空間とは，ある $A \subseteq \mathbb{R}^m$ に対して $\langle A \rangle$ と書ける集合)



線形代数の復習：線形部分空間の次元

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$，$A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

ベクトルが張る空間とは？

線形部分空間 $\langle A \rangle$ の次元とは，

$$\dim\langle A \rangle = \min\{|B| \mid \langle A \rangle = \langle B \rangle\}$$

定義より，$\dim\langle A \rangle \leq |A|$

事実 (参照：線形代数の講義・教科書)

$A, B \subseteq \mathbb{R}^m$：ベクトルの集合

1. A が線形独立 $\Leftrightarrow$ $\dim\langle A \rangle = |A|$
2. $A \subseteq B$ $\Rightarrow$ $\dim\langle A \rangle \leq \dim\langle B \rangle$
3. $A \subseteq B$ であるとき
$$\langle A \rangle = \langle B \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \dim\langle A \rangle = \dim\langle B \rangle$$

ベクトル・マトロイド

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$，$E = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid X \text{ は線形独立 }\}$$

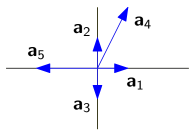
と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

E 上のベクトル・マトロイドと呼ばれる

ベクトル・マトロイド：例

- $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{X \subseteq E \mid X \text{ は線形独立 }\} \\ &= \{\emptyset, \{\mathbf{a}_1\}, \{\mathbf{a}_2\}, \{\mathbf{a}_3\}, \{\mathbf{a}_4\}, \{\mathbf{a}_5\}, \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}, \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}, \\ &\quad \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}, \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}, \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}, \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}, \{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}, \{\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5\}\}\end{aligned}$$



ベクトル・マトロイド：証明 (I1)

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$，$E = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid X \text{ は線形独立 }\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

(I1) の証明：

- 空集合 $\emptyset$ を考える
- 定義より，$\emptyset$ は線形独立
- したがって，$\emptyset \in \mathcal{I}$ □

ベクトル・マトロイド：証明 (I2)

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$，$E = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid X \text{ は線形独立 }\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

(I2) の証明：

- 集合 X, Y が $X \in \mathcal{I}$ と $Y \subseteq X$ を満たすと仮定する
- $X = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$，$Y = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_\ell\}$ とする (このとき，$\ell \leq k$)
- $X \in \mathcal{I}$ より，X は線形独立であり，すなわち，
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad \text{すべての } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ に対して } \lambda_i = 0$$
- 証明したいことは，Y が線形独立であることである

ベクトル・マトロイド：証明 (I2) 続き

(I2) の証明 (続き)：

- $\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$ であると仮定する
- 前ページの式において，

$$\lambda_i = \begin{cases} \mu_i & (i \leq \ell) \\ 0 & (i > \ell) \end{cases}$$

とすると，前ページの式は次のように書き換えられる

$$\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad \text{すべての } i \in \{1, \ldots, \ell\} \text{ に対して } \mu_i = 0$$

- 仮定より，すべての $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対して $\mu_i = 0$ となる □

ベクトル・マトロイド：証明 (I3)

ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$，$E = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$

命題

有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid X \text{ は線形独立 }\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイド

(I3) の証明：

- 集合 X, Y が $X, Y \in \mathcal{I}$ と $|X| > |Y|$ を満たすと仮定する
- $X \in \mathcal{I}$ より，X は線形独立であり，すなわち，$\dim\langle X \rangle = |X|$
- $Y \in \mathcal{I}$ より，Y は線形独立であり，すなわち，$\dim\langle Y \rangle = |Y|$
- [背理法] 任意の $\mathbf{x} \in X - Y$ に対して $Y \cup \{\mathbf{x}\}$ が線形独立ではないと仮定する

ベクトル・マトロイド：証明 (I3) 続き 1

主張 1

以上の仮定の下，任意の $\mathbf{x} \in X$ に対して，$\langle Y \cup \{\mathbf{x}\} \rangle = \langle Y \rangle$

主張 1 の証明：場合分け

(1) $\mathbf{x} \in X \cap Y$ のとき，$Y \cup \{\mathbf{x}\} = Y$
- したがって，$\langle Y \cup \{\mathbf{x}\} \rangle = \langle Y \rangle$

(2) $\mathbf{x} \in X - Y$ のとき，仮定より，$Y \cup \{\mathbf{x}\}$ は線形独立ではない
- したがって，

$$|Y| = \dim\langle Y \rangle \leq \dim\langle Y \cup \{\mathbf{x}\} \rangle < |Y \cup \{\mathbf{x}\}| = |Y| + 1$$

- したがって，$\dim\langle Y \rangle = \dim\langle Y \cup \{\mathbf{x}\} \rangle$
- $Y \subseteq Y \cup \{\mathbf{x}\}$ なので，$\langle Y \rangle = \langle Y \cup \{\mathbf{x}\} \rangle$ □

ベクトル・マトロイド：証明 (I3) 続き 2

主張 2

以上の仮定の下，$\langle Y \cup X \rangle = \langle Y \rangle$

主張 2 の証明：主張 1 を繰り返し用いればよい (演習問題) □

(I3) の証明 (続き)：

- 主張 2 より，$\dim\langle Y \cup X \rangle = \dim\langle Y \rangle = |Y|$
- 一方，$X \subseteq Y \cup X$ であるから，$\dim\langle X \rangle \leq \dim\langle Y \cup X \rangle$
- すなわち，$|X| \leq |Y|$
- これは，$|X| > |Y|$ という仮定に矛盾 □

ベクトル・マトロイド：体による違い

ベクトル・マトロイドを考える体は $\mathbb{R}$ でなくてもよい

他の体の例

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ (二元体)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{Z}_2$ においては

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

どの体で考えても，マトロイドになる

目次

今回のまとめ と 次回の予告

今回

- マトロイドの定義と例

次回

- 基と階数 .... マトロイドをうまく扱うための概念

次回以降，前半の流れ (第 7 回まで)

- マトロイドと最小全域木問題の関係
  (貪欲アルゴリズム = Kruskal のアルゴリズム)
- 定理の証明

ここまでが，マトロイドの基礎

「マトロイド」という名称

matroid	=	matrix	+	-oid
マトロイド		行列		〜もどき

先ほどのベクトル・マトロイドの例は次の行列の列ベクトルを考えている

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員は巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK