離散最適化基礎論 (11) 2016年1月22日
演習問題 岡本 吉央

提出締切： 2016年1月29日 講義終了時

<u>注意</u>：今までの講義，演習で証明した事項を用いてもよい．

復習問題 11.1 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ を考える．任意の $X \in \mathcal{I}, e \in E - X, f \in X$ に対して，$X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$ かつ $f \in C(e, X)$ ならば，$(X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}$ となることを証明せよ．ただし，$C(e, X)$ とは，$X \cup \{e\}$ に含まれる唯一のサーキットを表す．

復習問題 11.2 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ とその階数関数 r を考える．マトロイド $\mathcal{I}$ の任意のサーキット C と任意の $f \in E, A \subseteq E$ に対して，$f \in C \subseteq A$ ならば，$r(A - \{f\}) = r(A)$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 11.3 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の共通独立集合 $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ を考える．集合 X から次で定義される有向グラフ G_X を構成する．まず，G_X の頂点集合は $E \cup \{s, t\}$ である．ただし，$s, t \notin E$ とする．次に，G_X の有向辺集合は

$$\begin{aligned}&\{(s,e) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_2\} \cup \{(e,t) \mid e \in E - X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}_1\} \cup\\&\{(e,f) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_1\} \cup\\&\{(f,e) \mid e \in E - X, f \in X, X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_2, (X \cup \{e\}) - \{f\} \in \mathcal{I}_2\}\end{aligned}$$

である．以下の問いに答えよ．

1. グラフ G_X において，s から t へ至る有向道が存在すると仮定する．そのような道の中で最短のものを $s \to e_1 \to f_1 \to \cdots \to e_m \to f_m \to e_{m+1} \to t$ とする．このとき，$e_1, \ldots, e_{m+1} \in E - X$ であり，$f_1, \ldots, f_m \in X$ であることを確認せよ．
2. $T = X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}$ とする．このとき，$r_1(T) \geq |X| + 1$ となることを証明せよ．ただし，r_1 はマトロイド $\mathcal{I}_1$ の階数関数である．
3. $X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{I}_1$ であることを証明せよ．
4. 前の小問から，$X \cup \{e_i\}$ は $\mathcal{I}_1$ のサーキットを含むことが分かる．そのサーキットを C とする．任意の $i \in \{m+1, \ldots, 1\}$ に対して，$T_i = T - \{f_m, \ldots, f_1\}$ とする (つまり，$T_{m+1} = T$ である)．このとき，$C \subseteq T_{i+1}$ が成り立つことを証明せよ．
5. $f_i \in C$ であることを証明せよ．
6. $r_1(T) = r_1(T_1) \leq |X| + 1$ が成り立つことを証明せよ．
7. $(X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} \in \mathcal{I}_1$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 11.4 演習問題 3 の状況を考える．以下の問いに答えよ．

1. グラフ G_X において，s から t へ至る有向道が存在しないと仮定する．このとき，G_X において s から到達できる E の要素の集合を S とする．任意の $e \in S \cap (E - X)$ に対して，$X \cup \{e\} \notin \mathcal{I}_1$ となることを証明せよ．
2. 任意の $e \in S \cap (E - X)$ と $f \in X - S$ を考える．このとき，$(X \cup \{e\}) - \{f\} \notin \mathcal{I}_1$ となることを証明せよ．
3. 任意の $e \in S \cap (E - X)$ に対して，$(X \cup \{e\}) - (X - S) \notin \mathcal{I}_1$ となることを証明せよ．
4. マトロイド $\mathcal{I}_1$ において，$X \cap S$ が S の基であることを証明せよ．

補足問題 11.5 演習問題 3 の状況を考え，グラフ G_X において，s から t へ至る有向道が存在すると仮定する．そのような道の中で最短のものを $s \to e_1 \to f_1 \to \cdots \to e_m \to f_m \to e_{m+1} \to t$ とする．$(X \cup \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}\}) - \{f_1, \ldots, f_m\} \in \mathcal{I}_2$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：演習問題 3 の流れを参考にしてみよ．)

補足問題 11.6 演習問題 3 の状況を考え，グラフ G_X において，s から t へ至る有向道が存在しないと仮定する．このとき，G_X において s から到達できる E の要素の集合を S とする．マトロイド $\mathcal{I}_2$ において，$X \cap (E - S)$ が $E - S$ の基であることを証明せよ．(ヒント：演習問題 4 の流れを参考にしてみよ．)