提出締切： 2016 年 1 月 22 日 講義終了時

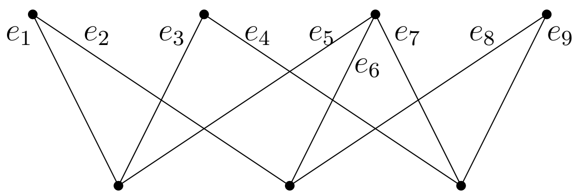
注意：今までの講義，演習で証明した事項を用いてもよい．

復習問題 10.1 非空な有限集合上のマトロイド $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ に対して，階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする．このとき，任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，

$$|X| \le r_1(S) + r_2(E - S)$$

が成り立つことを証明せよ．

復習問題 10.2 次の二部グラフの最大マッチングを 1 つ挙げよ．そして，それが最大マッチングであることを証明せよ．



(ヒント：演習問題 10.1 と 10.4 を利用してもよい．)

復習問題 10.3 非空な有限集合上のマトロイド $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ に対して，階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする．この問題の目標を次の等式を証明することである．

$$\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(S) + r_2(E-S) \mid S \subseteq E\}. \tag{1}$$

以下の手順に沿って，証明を行ってみよ．

1. 演習問題 10.1 を用いて，不等式 $\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \le \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$ を証明せよ．
2. つまり，式 (1) を証明するためには，不等式 $\max\{|X| \mid X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \ge \min\{r_1(S) + r_2(E - S) \mid S \subseteq E\}$ を証明すればよい．そのために，$|E|$ に関する帰納法を用いる．$|E| = 1$ のとき，式 (1) が成り立つことを証明せよ．
3. 任意の自然数 $k > 1$ に対して，$|E| = k$ のときに式 (1) が成り立つことを証明するために，$|E| < k$ のときに式 (1) が成り立つことを仮定する．任意の $e \in E$ が $\{e\} \notin \mathcal{I}_1$ または $\{e\} \notin \mathcal{I}_2$ を満たすとき，式 (1) が成り立つことを証明せよ．
4. $|E| < k$ のときに式 (1) が成り立つことを仮定し，$|E| = k$ であり，かつ，ある $e \in E$ が $\{e\} \in \mathcal{I}_1$ かつ $\{e\} \in \mathcal{I}_2$ を満たすとき，式 (1) が成り立つことを証明せよ．

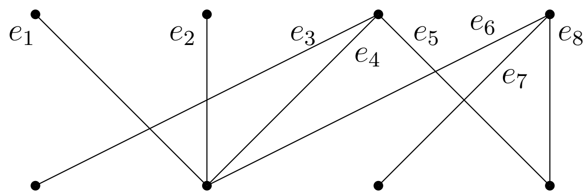
補足問題 10.4 非空な有限集合 E 上の分割マトロイドとは，E の分割 $\{E_1, \ldots, E_k\}$ と自然数 $r_1, \ldots, r_k \ge 0$ に対して $\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid$ すべての $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して $|X \cap E_i| \le r_i\}$ として定義される有限集合族 $\mathcal{I}$ である．

上のように定義される分割マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数を r としたとき，任意の $X \subseteq E$ に対して，

$$r(X) = \sum_{i=1}^{k} \min\{|X \cap E_i|, r_i\}$$

が成り立つことを証明せよ．

追加問題 10.5 次の二部グラフの最大マッチングを 1 つ挙げよ．そして，それが最大マッチングであることを証明せよ．



(ヒント：演習問題 10.1 と 10.4 を利用してもよい．)

追加問題 10.6 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ の階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする．関数 $f\colon 2^E \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．すなわち，任意の $X \subseteq E$ に対して

$$f(X) = r_1(X) + r_2(E - X).$$

次の最適化問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(X) \\ \text{subject to} & X \subseteq E. \end{array}$$

このとき，A と B が上の最適化問題の最適解であるならば，$A \cup B$ と $A \cap B$ も上の最適化問題の最適解となることを証明せよ．

追加問題 10.7 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．部分集合 $S, T \subseteq E$ が $S \cap T = \emptyset$ と $S, T \in \mathcal{I}$ を満たすとする．このとき，マトロイド交わり定理を用いて，

$$\begin{aligned} &\max\{|X| \mid X \in ((\mathcal{I}/S) \setminus T) \cap ((\mathcal{I}/T) \setminus S)\} \\ &= \min\{r(A) + r(E - A) - r(S) - r(T) \mid S \subseteq A \subseteq E - T\} \end{aligned}$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，r は $\mathcal{I}$ の階数関数を表す．