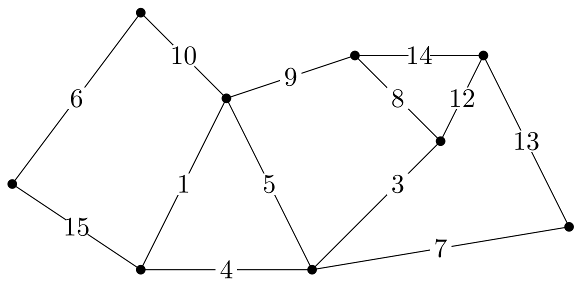
提出締切： 2015 年 11 月 27 日 講義終了時

復習問題 5.1 次に示す無向グラフに対して，Kruskal のアルゴリズムを適用することで，最小全域木を構成せよ．その過程を示す必要はなく，結果のみを示せばよい．



各辺の上に書かれている数字がその辺の重みを表す．

復習問題 5.2 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と，重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して，次の最大独立集合問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}. \end{array}$$

最大独立集合問題の最適解として，$\mathcal{I}$ の基であるものが存在することを証明せよ．

復習問題 5.3 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ の基族が $\mathcal{B}$ であるとする．

1. 重み c が与えられたとき，重み w を，任意の $e \in E$ に対して，$w(e) = C - c(e)$ として定義する．ただし，$C = \sum_{e \in E} c(e)$ とする．このとき，任意の集合 $X, Y \subseteq E$ に対して，
$$\sum_{e \in X} c(e) \leq \sum_{e \in Y} c(e)$$
が成り立つとき，そのときに限り，
$$C|X| - \sum_{e \in X} w(e) \leq C|Y| - \sum_{e \in Y} w(e)$$
が成り立つことを証明せよ．
2. 次の等式が成り立つことを証明せよ．
$$\min\left\{ \sum_{e \in B} c(e) \;\middle|\; B \in \mathcal{B} \right\}$$
$$= C \cdot r(E) - \max\left\{ \sum_{e \in X} w(e) \;\middle|\; X \in \mathcal{I} \right\}.$$
ただし，$r(E)$ は E の階数，すなわち，マトロイドの基の要素数である．(ヒント：問題 5.2 を用いてもよい．)

復習問題 5.4 非空な有限集合 E 上の独立集合族 $\mathcal{F}$ と重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ に対して，以下の貪欲アルゴリズムを考える．

Step 1. E の要素 e を $w(e)$ の大きい順に並べる．$w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_n)$ であると仮定する．

Step 2. $X \leftarrow \emptyset$.

Step 3. すべての $i \leftarrow 1, 2, \ldots, n$ に対して，以下を繰り返し．
$$X \leftarrow \begin{cases} X \cup \{e_i\} & (X \cup \{e_i\} \in \mathcal{F} \text{ のとき}), \\ X & (X \cup \{e_i\} \notin \mathcal{F} \text{ のとき}). \end{cases}$$

Step 4. X を出力する．

独立集合族 $\mathcal{F}$ がマトロイドであるとき，このアルゴリズムが w に関する最大独立集合を必ず出力することを，以下の手順に従って証明せよ．

1. アルゴリズムの出力を B とし，w に関する最大独立集合の 1 つを B^* とする．ここで，B と B^* は $\mathcal{F}$ の基であるとしてよい．任意の $i \in \{1\ldots, n\}$ に対して
$$\begin{array}{rcl} B_i &=& B \cap \{e_1, \ldots, e_i\} \\ B_i^* &=& B^* \cap \{e_1, \ldots, e_i\} \end{array}$$
とする．r を $\mathcal{I}$ の階数関数とするとき，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$|B_i^*| \leq r(\{e_1, \ldots, e_i\})$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：第 3 回演習問題にある階数関数の性質を利用してもよい．)
2. 上の設定において，任意の $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対して，$|B_i| = r(\{e_1, \ldots, e_i\})$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：第 3 回演習問題にある階数関数の性質を利用してもよい．)
3. 以上を踏まえて，
$$\sum_{e \in B} w(e) \geq \sum_{e \in B^*} w(e)$$
を証明し，B が w に関する最大独立集合であることを結論づけよ．

復習問題 5.5 独立集合族 $\mathcal{F}$ がマトロイドではないとき，演習問題 5.4 にある貪欲アルゴリズムが最大独立集合を出力するとは限らないこと，つまり，マトロイドではない任意の独立集合族 $\mathcal{F}$ に対して，ある重み w が存在して，貪欲アルゴリズムが w に関する最大独立集合を出力しないことを証明せよ．

次ページに続く

追加問題 5.6 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ を考える．重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ が次の性質を満たすと仮定する．

任意の異なる $e, e' \in E$ に対して，$w(e) \neq w(e')$.

このとき，w に関する $\mathcal{I}$ の最大基は 1 つしか存在しないことを証明せよ．(ヒント：基交換公理を用いてみよ．)

追加問題 5.7 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ に対して，重み $w\colon E \to \mathbb{R}$ として，負値を許す場合を考える．このとき，w に関する $\mathcal{I}$ の最大独立集合を出力するアルゴリズムを与え，その正当性 (つまり，必ず最適解を出力すること) を証明せよ．

追加問題 5.8 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ に対して，非負重み $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ と自然数 $k \geq 0$ を考える．このとき，最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \displaystyle\sum_{e \in X} w(e) \\ \text{subject to} & X \in \mathcal{I}, |X| \leq k \end{array}$$

の最適解を出力するアルゴリズムを与え，その正当性 (つまり，必ず最適解を出力すること) を証明せよ．