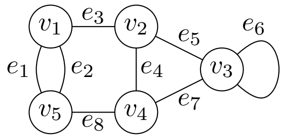
離散最適化基礎論 (4) **2015 年 11 月 6 日**
演習問題 **岡本 吉央**

提出締切： 2015 年 11 月 13 日 講義終了時

復習問題 4.1 次の図で表される無向グラフ G を考える．



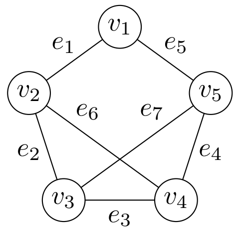
以下の問いに答えよ．

1. グラフ G の接続行列 $B(G)$ を書き下してみよ．
2. グラフ G の閉路マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ を書き下してみよ．

復習問題 4.2 無向グラフ $G = (V, E)$ と G の閉路マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．このとき，G の辺部分集合 $X \subseteq E$ に対して，$X \in \mathcal{I}$ であるならば，グラフ $G[X] = (V, X)$ が閉路を含まないことを証明せよ．

復習問題 4.3 無向グラフ $G = (V, E)$ と G の閉路マトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．このとき，G の辺部分集合 $X \subseteq E$ に対して，グラフ $G[X] = (V, X)$ が閉路を含まないならば，$X \in \mathcal{I}$ であることを証明せよ．

追加問題 4.4 次の図で表す無向グラフを考える．



以下の問いに答えよ．

1. グラフ G の接続行列 $B(G)$ を書き下してみよ．
2. グラフ G の閉路マトロイドの基族 $\mathcal{B}$ を書き下してみよ．

追加問題 4.5 分割マトロイドは以下のように定義された．非空な有限集合 E，集合 E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$，自然数 $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 0$ に対して，有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \left\{ X \subseteq E \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } i \in \{1, \ldots, k\} \text{ に対して，} \\ |X \cap E_i| \leq r_i \end{array} \right\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイドであり，これを E 上の分割マトロイドと呼ぶのであった．

すべての $i \in \{1, \ldots, k\}$ に対して $r_i = 1$ であるような E 上の分割マトロイド $\mathcal{I}$ に対して，ある無向グラフ $G = (V, E)$ が存在して，G の閉路マトロイドが $\mathcal{I}$ に等しくなることを証明せよ．(注意：G の辺集合が $\mathcal{I}$ の台集合 E と同一であることに注意せよ．)

追加問題 4.6 一様マトロイドは以下のように定義された．非空な有限集合 E と自然数 $r \geq 0$ に対して，有限集合族 $\mathcal{I}$ を

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$$

と定義すると，$\mathcal{I}$ は E 上のマトロイドであり，これを E 上の一様マトロイドと呼ぶのであった．

集合 $E = \{1, 2, 3, 4\}$ と $r = 2$ に対して定義される一様マトロイド $\mathcal{I} = U_{2,4}$ はどの無向グラフ G の閉路マトロイドとも等しくない．これを証明せよ．