提出締切： 2015 年 11 月 6 日 講義終了時

復習問題 3.1 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $B \subseteq E$ がマトロイド $\mathcal{I}$ の基であり，$X \subseteq B$ であるとき，$X \in \mathcal{I}$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.2 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $B, B' \subseteq E$ がマトロイド $\mathcal{I}$ の基であるとき，$|B| = |B'|$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.3 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $B, B' \subseteq E$ はマトロイド $\mathcal{I}$ の基であるとする．このとき，任意の $e \in B$ に対して，ある $e' \in B'$ が存在して，$(B - \{e\}) \cup \{e'\}$ も $\mathcal{I}$ の基であることを証明せよ．(ヒント：問題 3.2 と 3.7 を用いてもよい．)

復習問題 3.4 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．任意の $X \subseteq E$ に対して次を満たす $B_X \subseteq X$ が存在することを証明せよ．

> $B_X \in \mathcal{I}$，かつ，任意の $e \in X - B_X$ に対して $B_X \cup \{e\} \not\in \mathcal{I}$ である．

復習問題 3.5 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ をマトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数とするとき，$X \subseteq E$ かつ $e \in E$ ならば，$r(X \cup \{e\}) \leq r(X) + 1$ が成り立つことを証明せよ．

復習問題 3.6 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ をマトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数とするとき，任意の $X, Y \subseteq E$ に対して，$r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$ が成り立つことを証明せよ．(ヒント：問題 3.9 と 3.10 を用いてもよい．)

補足問題 3.7 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $B \subseteq E$ がマトロイド $\mathcal{I}$ の基であり，集合 $X \subseteq E$ が $X \in \mathcal{I}$ と $|B| = |X|$ を満たすとき，X もマトロイド $\mathcal{I}$ の基であることを証明せよ．(ヒント：問題 3.2 を用いてもよい．)

補足問題 3.8 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．任意の集合 $X \subseteq E$ の基 B_X, B'_X に対して，$|B_X| = |B'_X|$ が成り立つことを証明せよ．

補足問題 3.9 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ が次の性質を満たすことを証明せよ．

1. $X \subseteq E$ ならば，$r(X) \leq |X|$ となる．
2. $X \in \mathcal{I}$ であるとき，そのときに限り，$r(X) = |X|$ となる．
3. $X \subseteq Y \subseteq E$ ならば，$r(X) \leq r(Y)$ となる．

補足問題 3.10 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $S, T \subseteq E$ が $S \subseteq T$ を満たすとする．このとき，S の任意の基 B に対して，T のある基 B' が存在して，$B \subseteq B'$ となることを証明せよ．

追加問題 3.11 有限集合 $E = \{1, 2, 3\}$ 上の有限集合族 $\mathcal{I}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

以下の問いに答えよ．

1. $\mathcal{I}$ が E 上のマトロイドであることを証明せよ．
2. マトロイド $\mathcal{I}$ の従属集合をすべて挙げよ．
3. マトロイド $\mathcal{I}$ の基をすべて挙げよ．
4. マトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットをすべて挙げよ．
5. マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数がどのように定められるか，各集合 $X \subseteq E$ に対する階数関数の値を並べることにより答えよ．

追加問題 3.12 非空な有限集合 E と自然数 $r \geq 0$ に対して，一様マトロイド $\mathcal{I} = \{X \subseteq E \mid |X| \leq r\}$ を考える．以下の問いに証明付きで答えよ．

1. 集合 $X \subseteq E$ が $\mathcal{I}$ の従属集合であるための必要十分条件を与えよ．
2. 集合 $B \subseteq E$ が $\mathcal{I}$ の基であるための必要十分条件を与えよ．
3. 集合 $C \subseteq E$ が $\mathcal{I}$ のサーキットであるための必要十分条件を与えよ．
4. マトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数 r が次の式で与えられることを確認せよ．

$$\text{任意の } X \subseteq E \text{ に対して，} \quad r(X) = \begin{cases} |X| & (|X| \leq r) \\ r & (|X| > r). \end{cases}$$

追加問題 3.13 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $C \subseteq E$ がマトロイド $\mathcal{I}$ のサーキットであり，$C \subseteq X$ であるとき，$X \not\in \mathcal{I}$ が成り立つことを証明せよ．

追加問題 3.14 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．集合 $X \subseteq E$ が $X \in \mathcal{I}$ を満たすための必要十分条件は，マトロイド $\mathcal{I}$ のある基 B が存在して，$X \subseteq B$ となることである．これを証明せよ．

次ページに続く

追加問題 3.15 自然数 $m, n \geq 1$ に対して，任意のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ を考え，集合 $E = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ 上のベクトル・マトロイドを考える．このとき，その階数関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ は，任意の $X \subseteq E$ に対して

$$r(X) = \dim\langle X \rangle$$

として定められることを証明せよ．(ヒント：上にあるどの問題の結果を用いてもよい．)

追加問題 3.16 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．関数 $r\colon 2^E \to \mathbb{N}$ をマトロイド $\mathcal{I}$ の階数関数とするとき，任意の $X \subseteq E$ と $e, e' \in E$ に対して，$r(X \cup \{e\}) = r(X \cup \{e'\}) = r(X)$ ならば，$r(X \cup \{e, e'\}) = r(X)$ となることを証明せよ．(ヒント：上にあるどの問題の結果を用いてもよい．) (補足：この問題と問題 3.15，問題 2.5 の関係に注目せよ．)