離散最適化基礎論 期末試験	**2016 年 2 月 12 日** 岡本 吉央

14:40–16:10．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．
採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと (その文字列は控えておくように)．採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

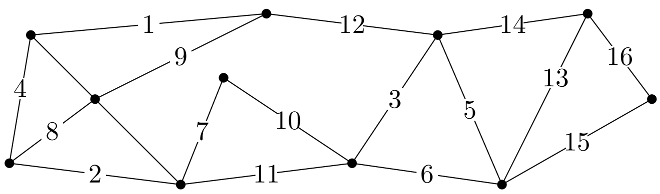
問題 1 有限集合 $E = \{1,2,3,4\}$ 上の有限集合族 $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$ はマトロイドではない．なぜマトロイドではないのか説明せよ．

問題 2 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}$ と，その階数関数 r を考える．集合 X, Y が $X \subseteq Y \subseteq E$ を満たすとき，任意の $e \in E$ に対して，

$$r(X \cup \{e\}) - r(X) \geq r(Y \cup \{e\}) - r(Y)$$

が成り立つことを証明せよ．(ヒント：階数関数の劣モジュラ性を利用してもよい．)

問題 3 次に示す無向グラフに対して，Kruskal のアルゴリズムを適用することで，最小全域木を構成せよ．その過程を示す必要はなく，結果のみを示せばよい．



各辺の上に書かれている数字がその辺の重みを表す．

問題 4 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．任意の $X \in \mathcal{I}$ と任意の $e \in E - X$ に対して，$X \cup \{e\}$ が従属ならば，$X \cup \{e\}$ が $\mathcal{I}$ のサーキットをただ 1 つ含むことを証明せよ．(ヒント：サーキットに対する弱消去公理を利用してもよい．)

問題 5 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ を考える．任意の独立集合 $S \in \mathcal{I}$ に対して，マトロイド $\mathcal{I}$ の縮約 $\mathcal{I}/S = \{X \mid X \cup S \in \mathcal{I}, X \subseteq E - S\}$ が $E - S$ 上のマトロイドであることを証明せよ．

問題 6 非空な有限集合 E 上のマトロイド $\mathcal{I}_1$ と $\mathcal{I}_2$ に対して，階数関数をそれぞれ r_1, r_2 とする．このとき，任意の $X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ と任意の $S \subseteq E$ に対して，$|X| \leq r_1(S) + r_2(E - S)$ が成り立つことを証明せよ．

以上