グラフとネットワーク　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**2015 年 6 月 8 日**
中間試験　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　岡本 吉央

10:40–12:10．A4 用紙 (両面自筆書き込み) のみ持ち込み可．
携帯電話，タブレット等は**電源を切って**カバンの中にしまうこと．

採点終了次第，講義 web ページにて，得点分布，講評などを掲載する．
採点結果を知りたい場合は，解答用紙右上「評点」欄の中に 5 文字程度の適当なランダム文字列を記載のこと．(その文字列は覚えておくように．) 採点終了後，そのランダム文字列と得点の対応表を公開する．

問題 1　無向グラフ G と自然数 $k \in \mathbb{N}$ を考える (ただし，$k \geq 3$)．このとき，$\delta(G) \geq k-1$ ならば，G が頂点数 k 以上の閉路を含むことを証明せよ．(ヒント：$\delta(G)$ は G の最小次数を表す．G における長さ最大の 道 を考えよ．)

問題 2　頂点集合が $V = \{0,1,2,3,4,5\}$ である無向グラフ G で，各頂点の次数が次のように定められるものが存在するかどうか判定せよ．また，その理由も述べよ．

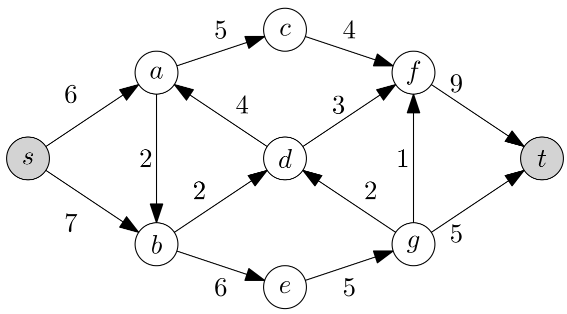
(a) $\deg_G(0) = \deg_G(1) = \deg_G(2) = 1, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 3.$

(b) $\deg_G(0) = \deg_G(1) = 2, \quad \deg_G(2) = 3, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 5.$

(c) $\deg_G(0) = \deg_G(1) = \deg_G(2) = 2, \quad \deg_G(3) = \deg_G(4) = \deg_G(5) = 3.$

注意：(この講義における) 無向グラフでは，2 頂点間に存在する辺の数は必ず 1 以下であり，2 端点を同じ頂点とする辺も存在しない．

問題 3　次の有向グラフにおいて，s から t へ至る最大流を 1 つ見つけよ．また，それが最大流であることを証明せよ．



各弧の横に添えられている数はその弧の容量を表す．(注意：増加道法を動かした様子を証明において記述する必要はない (記述しない方がよい)．それによって見つかった流れが最大流であることを証明するために，弱双対性を利用せよ．)

問題 4　無向グラフ $G = (V, E)$ が木であると仮定する．このとき，G の完全マッチングの個数は 1 か 0 であることを証明せよ．

以上