グラフとネットワーク 第 14 回
ラムゼー理論

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 8 月 3 日

最終更新：2015 年 7 月 31 日　08:11

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/13)
2. 道と閉路：数理 (4/20)
3. 木：数理 (4/27)
- ＊ みどりの日で休み (5/4)
4. マッチング：数理 (5/11)
5. マッチング：モデル化 (5/16)
6. 最大流：数理 (5/25)
7. 最大流：モデル化 (1) (6/1)
- 中間試験 (6/8)

スケジュール 後半

8. 最大流：モデル化 (2) (6/15)
9. 全域木：数理とモデル化 (6/22)
10. 彩色：数理 (6/29)
11. 彩色：モデル化 (7/6)
12. 平面グラフ：数理 (7/13)

* 海の日で休み (7/20)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/27)
14. ラムゼー理論 (8/3)

- 期末試験 (@西 5-209) (8/10)

期末試験 (前回のアナウンスと同じ)

- 日時，場所：8 月 10 日 (月) 2 限 @ 西 5 号館 209 教室
- 出題範囲
  - 第 7 回講義 (6/1) から第 13 回講義 (7/27) の資料，演習
- 出題形式
  - 演習問題と同じ形式の問題を 4 題出題する
  - その中の 2 題以上は演習問題として提示されたものと同一である (ただし,「発展」として提示された演習問題は出題されない)
  - 全問に解答する
- 配点：1 題 15 点満点，計 60 点満点
- 時間：90 分
- 持ち込み：A4 用紙 1 枚分 (裏表自筆書き込み) のみ可

成績評価

- $\min\{100, \text{中間試験の素点} + \text{期末試験の素点}\}$ による

概要

今日の目標

ラムゼー理論の基礎を理解する

- グラフのラムゼー数
- ラムゼー理論に関わるゲーム

目次

Frank P. Ramsey

イギリスの思想家，経済学者 (1903–1930)

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Frank_Plumpton_Ramsey.JPG

ラムゼー理論とは？

D. West の本 ('01) からの引用 (の試訳)

「ラムゼー理論」とは大きな構造の分割に関する研究を指す．典型的な結果は，分割のある類に特殊な部分構造が必ず生起するというものである．モツキンは「完全な無秩序は不可能である」ということばでこれを表現した．我々が考える対象は単に集合や数であり，...

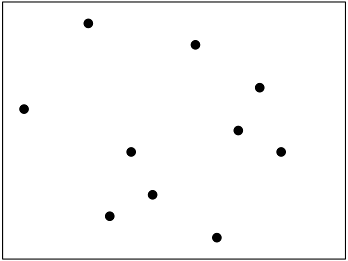
原文：“Ramsey theory” refers to the study of partitions of large structures. Typical results state that a special substructure must occur in some class of the partition. Motzkin described this by saying that “Complete disorder is impossible.” The objects we consider are merely sets and numbers, ...

格言

物理学に「物理学的現象」，生物学に「生物学的現象」があるように数学にも「数学的現象」が存在する

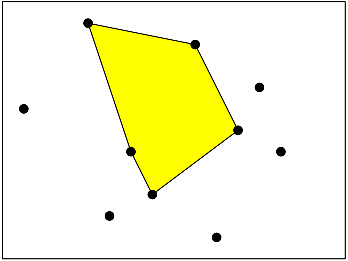
ちょっとした例

平面上に，どの 3 点も一直線上にのらないように 10 点置く



ちょっとした例

平面上に，どの 3 点も一直線上にのらないように 10 点置く



必ず，そこには (中に他の点を含まない) 凸五角形が現れる

(Harborth '78)

集合の 2 分割

有限集合 $X = \{1, \dots, n\}$，自然数 a, b，$n = a + b - 1$

観察

X の任意の 2 分割 $X = X_1 \cup X_2$ に対して (ただし，$X_1 \cap X_2 = \emptyset$)

$$|X_1| \geq a \quad \text{または} \quad |X_2| \geq b$$

が成り立つ

証明：演習問題

今から行うこと

- 集合の分割に対する観察をグラフに対して行う
- 特に，完全グラフの辺集合を分割する

目次

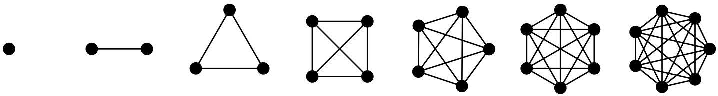
復習：完全グラフ

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 $n \in \mathbb{N}$

完全グラフとは？

G が完全グラフであるとは，V のどの 2 頂点も辺で結ばれていること

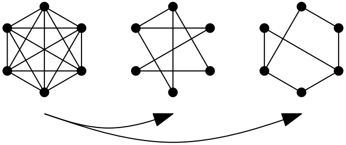
頂点数 n の完全グラフを K_n と表記する



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6 K_7

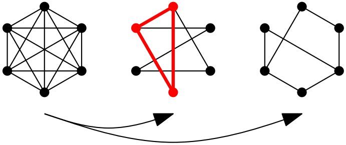
完全グラフの辺集合の分割

K_6 の辺集合を 2 分割して，2 つのグラフを得る



完全グラフの辺集合の分割

K_6 の辺集合を 2 分割して，2 つのグラフを得る



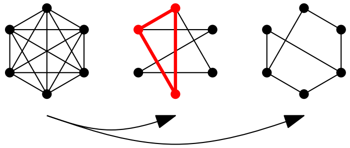
K_6 に対するラムゼー理論

K_6 に対するラムゼー理論

K_6 の辺集合を任意に 2 分割してできたグラフ G_1, G_2 において

$$G_1 \text{ が } K_3 \text{ を含む} \quad \text{または} \quad G_2 \text{ が } K_3 \text{ を含む}$$

が成り立つ

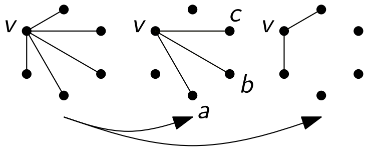


比喩的に，次のような言われ方もする

6 人出席者のいるパーティーでは，互いに知り合いである 3 人組か，
互いに知り合いではない 3 人組が必ず存在する

K_6 に対するラムゼー理論：証明 (1)

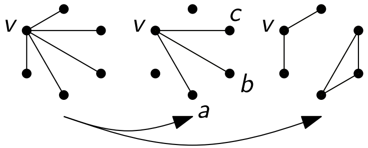
- K_6 の頂点を 1 つ任意に選んで，v とする
- v に接続する辺は 5 つ存在
- その中の 3 つは G_1 か G_2 に存在　(補足：集合の 2 分割)
- この 3 つが G_1 に存在する場合を考える
  (G_2 に存在する場合も同様)
- その 3 辺に接続する v 以外の頂点を a, b, c とする



K_6 に対するラムゼー理論：証明 (2) 場合分け

場合 1：a, b, c を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれるとき

場合 2：そうではないとき

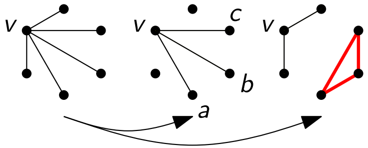


K_6 に対するラムゼー理論：証明 (2) 場合分け

場合 1：a, b, c を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれるとき

- a, b, c を頂点集合とする K_3 が G_2 に含まれる

場合 2：そうではないとき



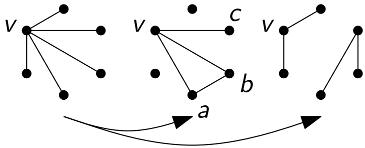
K_6 に対するラムゼー理論：証明 (2) 場合分け

場合 1：a, b, c を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれるとき

- a, b, c を頂点集合とする K_3 が G_2 に含まれる

場合 2：そうではないとき

- a, b, c を結ぶ辺の 1 つは G_1 に含まれる
- それを $\{a, b\}$ であるとする (他の場合も同様)
- a, b, v を頂点とする K_3 が G_1 に含まれる $\square$



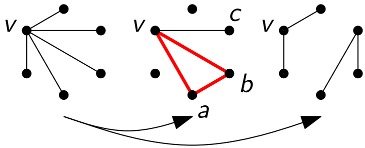
K_6 に対するラムゼー理論：証明 (2) 場合分け

場合 1：a, b, c を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれるとき

- a, b, c を頂点集合とする K_3 が G_2 に含まれる

場合 2：そうではないとき

- a, b, c を結ぶ辺の 1 つは G_1 に含まれる
- それを $\{a, b\}$ であるとする (他の場合も同様)
- a, b, v を頂点とする K_3 が G_1 に含まれる $\square$



グラフに対するラムゼー理論とは？

グラフに対するラムゼー理論とは？

- 完全グラフの辺集合を分割して，グラフ $G_1, \ldots, G_r$ を得る
- このとき，その中のどれかがある大きさの完全グラフを含む

先ほどの例

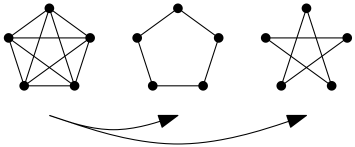
- 頂点数 6 の完全グラフの辺集合を 2 分割
- このとき，どちらかが頂点数 3 の完全グラフを含む

注意

頂点数 6 の完全グラフの辺集合 2 分割でこれが成り立つので，
頂点数 7, 8, 9,... の完全グラフの辺集合を 2 分割しても
どちらかは頂点数 3 の完全グラフを必ず含む

頂点数 5 だとどうか？

K_5 の辺集合を 2 分割しても K_3 は含まれないかもしれない



この意味で,「6」が極値になっている

目次

ラムゼー数

自然数 k, ℓ

ラムゼー数 $R(k, \ell)$ とは？

K_n の辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つような**最小**の n

先ほどの場合に対応するのは：$R(3, 3) = 6$

- $\boxed{R(3,3) \leq 6}$：
  K_6 の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を**任意に**作ると
  「G_1 が K_3 を含む，または，G_2 が K_3 を含む」が成り立つ
- $\boxed{R(3,3) \geq 6}$：
  K_5 の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を**うまく**作ると
  「G_1 が K_3 を含まず，かつ，G_2 が K_3 を含まない」が成り立つ

ラムゼー数の上界と下界

自然数 k, ℓ

ラムゼー数 $R(k,\ell)$ とは？

K_n の辺集合を 2 つに分けてグラフ G_1, G_2 を任意に作ったとき

G_1 が K_k を含む　または　G_2 が K_ℓ を含む

が成り立つような最小の n

$R(k,\ell) = N$ を証明するには…

- $\boxed{R(k,\ell) \leq N \text{ の証明}}$：
  K_N の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ると
  「G_1 が K_k を含む，または，G_2 が K_ℓ を含む」が成り立つ
- $\boxed{R(k,\ell) \geq N}$：
  K_{N-1} の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 をうまく作ると
  「G_1 が K_k を含まず，かつ，G_2 が K_ℓ を含まない」が成り立つ

ラムゼー数に対する疑問

疑問

任意の自然数 k, ℓ に対して，十分に大きな N を考えると K_N の辺集合を 2 つに分けて G_1, G_2 を任意に作ったとき

$$G_1 \text{ が } K_k \text{ を含む} \quad \text{または} \quad G_2 \text{ が } K_\ell \text{ を含む}$$

は成り立つのか？

疑問：別の言い方

任意の自然数 k, ℓ に対して，$R(k, \ell)$ は存在するのか？

ラムゼー数の存在性

グラフに対するラムゼーの定理

任意の自然数 k, ℓ に対して，ある自然数 N が存在して
K_N の辺集合を 2 分割して G_1, G_2 を任意に作ると

$$G_1 \text{ が } K_k \text{ を含む} \quad \text{または} \quad G_2 \text{ が } K_\ell \text{ を含む}$$

が成り立つ

わざわざ難しく書くと

- $\forall$ 自然数 k, ℓ
- $\exists$ 自然数 N
- $\forall$ K_N の辺集合の 2 分割から作られる G_1, G_2 :
- G_1 が K_k を含む $\vee$ G_2 が K_ℓ を含む

ラムゼー数の存在性：証明

証明 は以下の再帰式に基づいた帰納法

ラムゼー数に対する再帰式

次の式が成立する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，$R(k, 1) = 1$
- 任意の $\ell \geq 1$ に対して，$R(1, \ell) = 1$
- 任意の $k, \ell > 1$ に対して，$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$

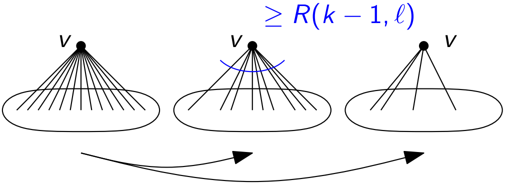
これが証明できれば，グラフに対するラムゼーの定理の証明になる

- $R(k, 1) = 1$ と $R(1, \ell) = 1$ は簡単．主題は最後の不等式

ラムゼー数に対する再帰式：証明 (1)

$N = R(k, \ell-1) + R(k-1, \ell)$ とする

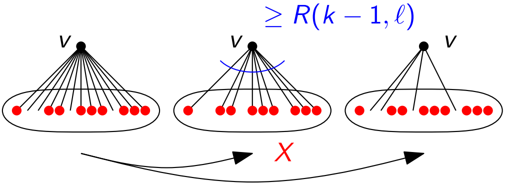
- K_N の頂点を 1 つ任意に選んで，v とする
- v に接続する辺は $N-1$ 個存在
- その中の $R(k-1, \ell)$ 個が G_1 に存在するか，または，
  その中の $R(k, \ell-1)$ 個が G_2 に存在　　　　(補足：集合の 2 分割)



ラムゼー数に対する再帰式：証明 (2)

v に接続する辺の中の $R(k-1,\ell)$ 個が G_1 に存在するとき

- それらの辺に接続する v 以外の頂点の集合を X とする
- $|X| \geq R(k-1,\ell)$
- 帰納法の仮定から，X の頂点を見ると
  1. その中の $k-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる，または
  2. その中の ℓ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる



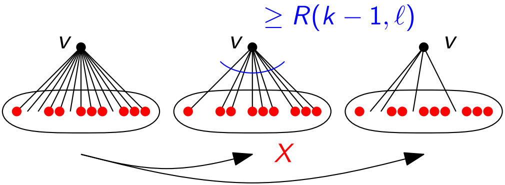
ラムゼー数に対する再帰式：証明 (3)

場合 1：X の中の $k-1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる

- G_1 において，それら $k-1$ 個の頂点と v が K_k を作る

場合 2：X の中の ℓ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる

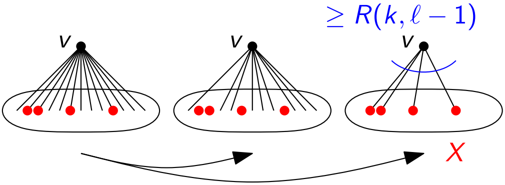
- G_2 において，それら ℓ 個の頂点が K_ℓ を作る



ラムゼー数に対する再帰式：証明 (4)

v に接続する辺の中の $R(k, \ell - 1)$ 個が G_2 に存在するとき

- それらの辺に接続する v 以外の頂点の集合を X とする
- $|X| \geq R(k, \ell - 1)$
- 帰納法の仮定から，X の頂点を見ると
  1. その中の k 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる，または
  2. その中の $\ell - 1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる



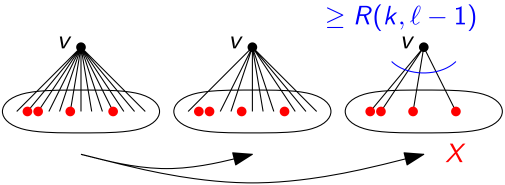
ラムゼー数に対する再帰式：証明 (5)

場合 1：X の中の k 頂点を結ぶ辺がすべて G_1 に含まれる

- G_1 において，それら k 個の頂点が K_k を作る

場合 2：X の中の $\ell - 1$ 頂点を結ぶ辺がすべて G_2 に含まれる

- G_2 において，それら $\ell - 1$ 個の頂点と v が K_ℓ を作る □



ラムゼー数の上界

ラムゼー数に対する再帰式 (再掲)

次の式が成立する

- 任意の $k \geq 1$ に対して，$R(k, 1) = 1$
- 任意の $\ell \geq 1$ に対して，$R(1, \ell) = 1$
- 任意の $k, \ell > 1$ に対して，$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(k, \ell-1)$

この式から次の上界が得られる (演習問題)

$$R(k, \ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1}$$

ただし，$\binom{a}{b}$ とは二項係数 (組合せの総数，${}_a\mathrm{C}_b$ とも書く)

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \qquad (\text{ただし，} a \geq b)$$

ラムゼー数の上界：$k = \ell$ の場合

特に，$k = \ell$ の場合

$$R(k, k) \le \binom{k + k - 2}{k - 1} = \binom{2k - 2}{k - 1} = \frac{(2k - 2)!}{(k - 1)!(k - 1)!}$$

ここで，スターリングの公式 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ を用いると次が得られる

$$R(k, k) = O\left(\frac{4^k}{\sqrt{k}}\right)$$

ラムゼー数に対する上界の表

$\binom{k+\ell-2}{k-1}$ の表

$k \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	10	15	21	28
4	1	4	10	20	35	56	84
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	6	21	56	126	252	462
7	1	7	28	84	210	462	924

小さなラムゼー数の表

小さなラムゼー数の表

$k \backslash \ell$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	6	9	14	18	23
4	1	4	9	18	25	35–41	49–61
5	1	5	14	25	43–49	58–87	80–143
6	1	6	18	35–41	58–87	102–165	113–298
7	1	7	23	49–61	80–143	113–298	205–540

(Radziszowski '14 によるまとめ)

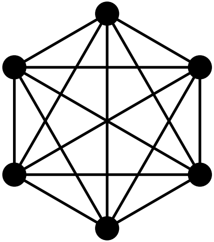
未解決問題

この表にあるギャップを埋めよ
($R(5,5) = 43$ であると予想されている)

目次

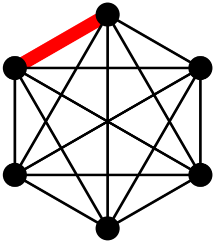
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



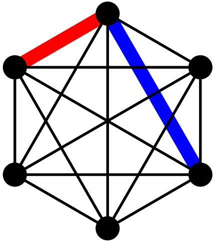
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



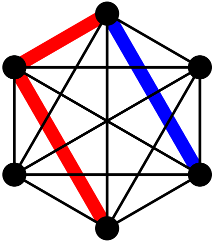
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



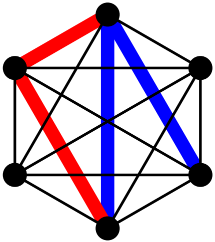
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



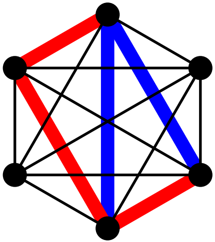
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



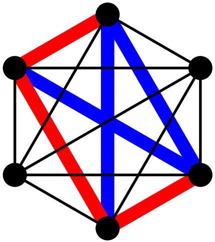
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



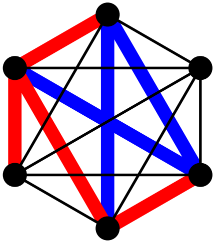
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



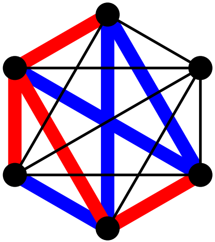
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



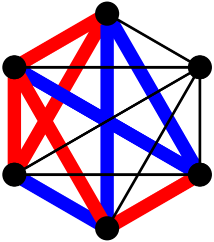
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



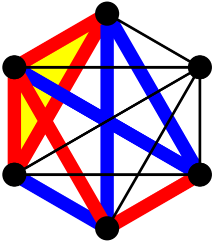
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



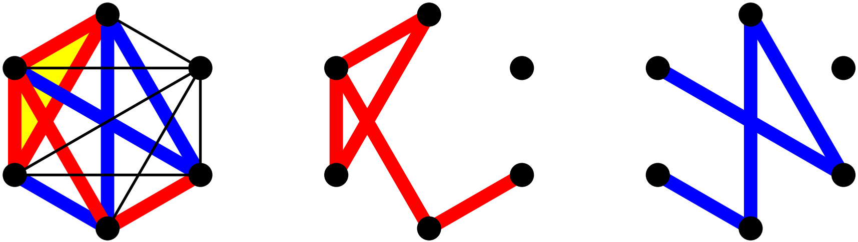
クリーク・ゲーム：基本形

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が勝ち



クリーク・ゲームとラムゼー理論

辺に色を塗ることは辺集合の分割を作っていくことに対応



ラムゼー理論の帰結

K_6 の中で K_3 を作るゲームに引き分けはない

疑問：先手に必勝法はあるか？ 後手に必勝法はあるか？

後手が勝つことはできない…

残念なお知らせ

後手が勝つことはできない

なぜか？

後手が勝つことはできない…

残念なお知らせ

後手が勝つことはできない

なぜか？ …… 戦略拝借 という考え方

- 後手に必勝法があると仮定する
- このとき，先手には次のような必勝法がある
- これは後手に必勝法があることに矛盾

後手が勝つことはできない…

残念なお知らせ

後手が勝つことはできない

なぜか？ …… 戦略拝借 という考え方

- 後手に必勝法があると仮定する
- このとき，先手には次のような必勝法がある
- これは後手に必勝法があることに矛盾

先手の必勝法

1. はじめは，任意の辺 (好きな辺) を選び，塗る
2. 次からは，相手を先手，自分を後手だと見なして，
   後手の必勝法に従って辺を選び，塗る
   - 既に自分が塗った辺を塗ろうとするときは，任意の辺を塗る
3. これを繰り返す

余計に辺を塗っても自分の不利にならず，相手の有利にもならないので，
これは先手の必勝法 □

ここまでのまとめ

K_6 の中で K_3 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

ここまでのまとめ

K_6 の中で K_3 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

ここまでのまとめ

K_6 の中で K_3 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

これは 簡単 なので演習問題

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (1)

K_{18} の中で K_4 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(4,4) = 18$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (1)

K_{18} の中で K_4 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(4,4) = 18$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (1)

K_{18} の中で K_4 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(4,4) = 18$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

これは未解決問題！ (Beck '08)

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joszef_Beck.jpeg

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (2)

K_{49} の中で K_5 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(5,5) \leq 49$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (2)

K_{49} の中で K_5 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(5,5) \leq 49$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (2)

K_{49} の中で K_5 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(5,5) \leq 49$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

これは未解決問題！ (Beck '08)

Seem to be hopeless

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joszef_Beck.jpeg

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (3)

K_{165} の中で K_6 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(6,6) \leq 165$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (3)

K_{165} の中で K_6 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(6,6) \leq 165$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

変種 1：大きなクリーク・ゲーム (3)

K_{165} の中で K_6 を作るゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から：$R(6,6) \leq 165$)
- 後手に必勝法はない (戦略拝借の考え方から)

つまり，先手に必勝法がある !!

次の疑問

先手に必勝法が存在することはわかったが
実際，どのように辺を塗れば必ず勝てるのか？ (必勝法の記述)

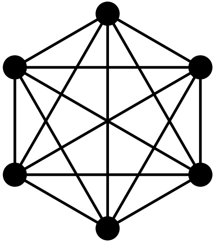
これは未解決問題！ (Beck '08)

Seem to be hopeless

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joszef_Beck.jpeg

変種 2：Sim

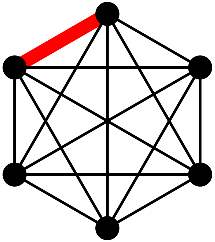
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

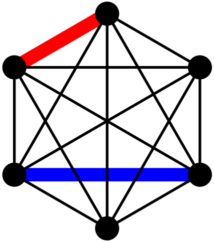
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

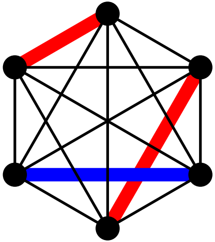
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

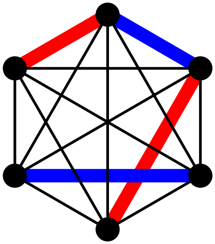
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
(つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

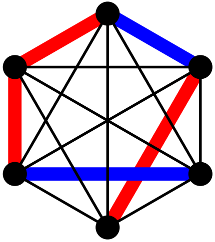
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

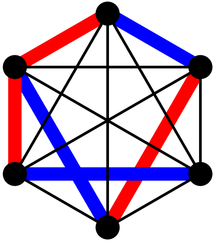
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

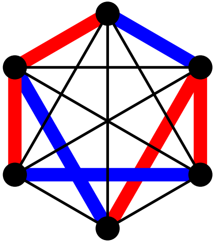
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

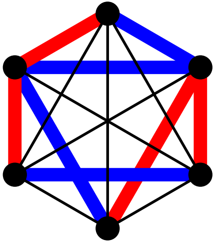
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

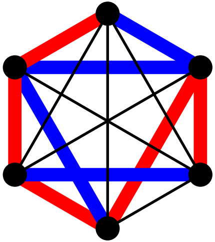
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons ’69)

変種 2：Sim

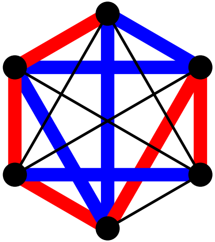
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons ’69)

変種 2：Sim

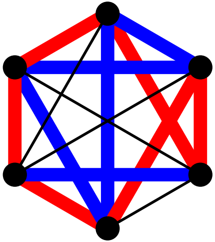
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

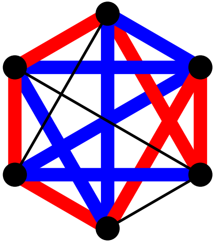
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
(つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

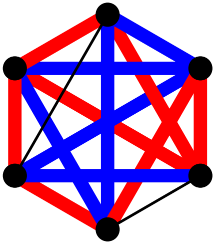
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

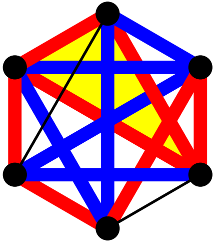
- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim

- 2 人で行うゲーム
- 完全グラフ K_6 の辺を順に塗る：先手は赤，後手は青
- 先に自分の色の K_3 を作った方が負け
  (つまり，相手に作らせた方が勝ち)



Sim: 発明者の Gustavus J. Simmons の名前にちなむ (Simmons '69)

変種 2：Sim — 何が知られている？

K_6 の中で K_3 を作らせるゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手必勝である！ (Mead, Rosa, Huang ’74)

証明はコンピュータによる探索 (手でもできるけど…)

変種 2 : Sim — 何が知られている？

K_6 の中で K_3 を作らせるゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼー理論から)
- 後手必勝である！ (Mead, Rosa, Huang '74)

証明はコンピュータによる探索 (手でもできるけど···)

未解決問題

Sim において後手必勝である「簡単」な証明と必勝法はあるか？

Sim の変種

K_{18} の中で K_4 を作らせるゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼーの理論から)

Sim の変種

K_{18} の中で K_4 を作らせるゲームにおいて

- 引き分けはない (ラムゼーの理論から)

未解決問題 (Beck '08)

このゲーム，後手必勝か先手必勝か？

目次

概要

今日のまとめ

ラムゼー理論の基礎を理解する

- グラフのラムゼー数
- ラムゼー理論に関わるゲーム

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次