グラフとネットワーク 第 11 回
彩色：モデル化

岡本 吉央
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 7 月 6 日

最終更新：2015 年 7 月 8 日　11:26

スケジュール 前半

1. グラフの定義と次数：数理 (4/13)
2. 道と閉路：数理 (4/20)
3. 木：数理 (4/27)

* みどりの日で休み (5/4)

4. マッチング：数理 (5/11)
5. マッチング：モデル化 (5/16)
6. 最大流：数理 (5/25)
7. 最大流：モデル化 (1) (6/1)

- 中間試験 (6/8)

注意：予定の変更もありうる

スケジュール 後半 (予定)

8. 最大流：モデル化 (2) (6/15)
9. 全域木：数理とモデル化 (6/22)
10. 彩色：数理 (6/29)
11. 彩色：モデル化 (7/6)
12. 平面グラフ：数理 (7/13)

- * 海の日で休み (7/20)

13. 平面グラフ：モデル化 (7/27)
14. ラムゼー理論 (8/3)

- 期末試験 (8/10？)

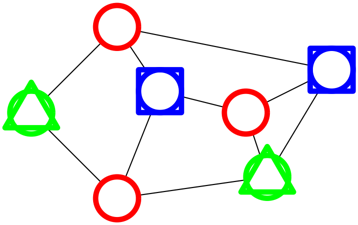
注意：予定の変更もありうる

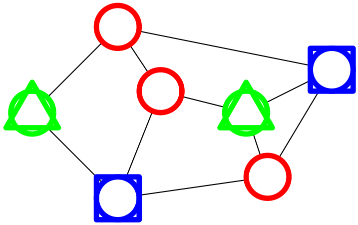
無向グラフの彩色

無向グラフ $G = (V, E)$

彩色とは？ (直感的な定義)

G の彩色 (さいしょく) とは，
G の頂点への色の割当で，各辺の両端点の色が異なるもの





彩色である　　彩色ではない

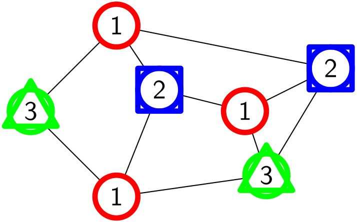
彩色において，同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

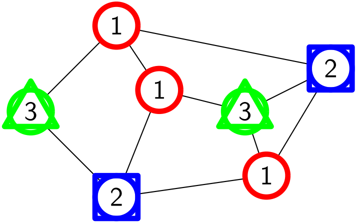
無向グラフの彩色：形式的な定義

無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

彩色とは？ (形式的な定義)

G の k 彩色とは，写像 $c \colon V \to \{1, \ldots, k\}$ で，
任意の辺 $\{u, v\} \in E$ に対して $c(u) \neq c(v)$ を満たすもの





3 彩色である　　3 彩色ではない

c の終域 $\{1, \ldots, k\}$ をパレットと呼ぶことがある

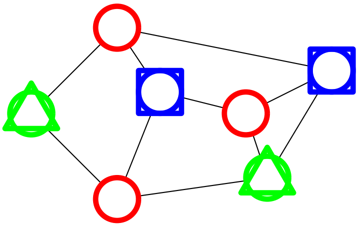
彩色可能性

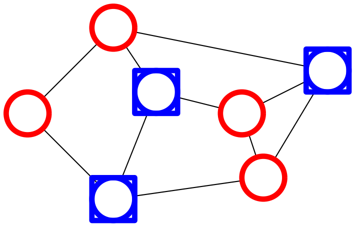
無向グラフ $G = (V, E)$，自然数 k

彩色可能性とは？

G が k 彩色可能であるとは，G の k 彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である





3 彩色である　　2 彩色は存在しない

注：G が k 彩色可能 $\Rightarrow$ G は $k+1$ 彩色可能

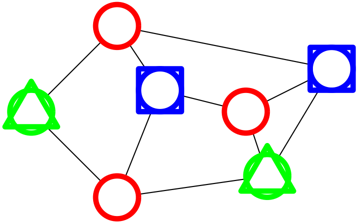
染色数

無向グラフ $G = (V, E)$

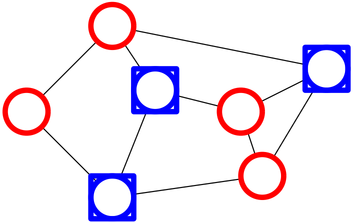
染色数とは？

G の**染色数**とは，G の k 彩色が存在するような最小の k

G の染色数を $\chi(G)$ で表す



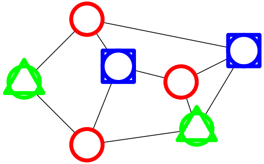
3 彩色である

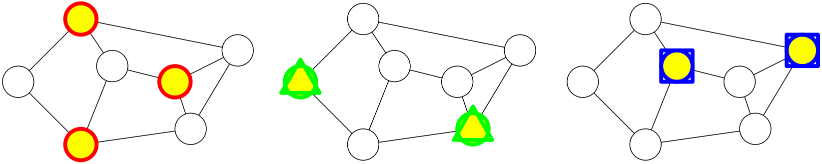


2 彩色は存在しない

$\therefore$ このグラフの染色数は 3

彩色クラスと独立集合





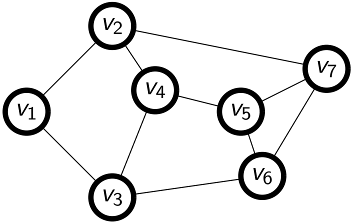
彩色の彩色クラスは独立集合

(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

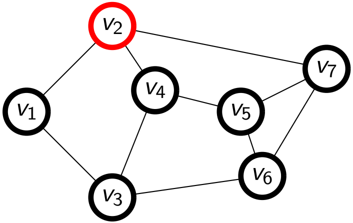


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

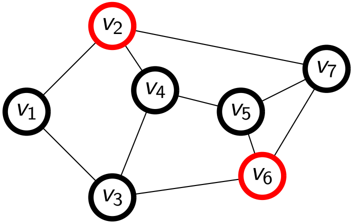


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

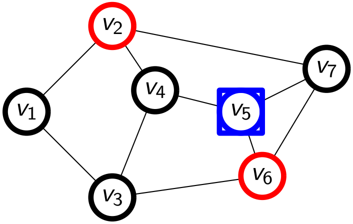


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

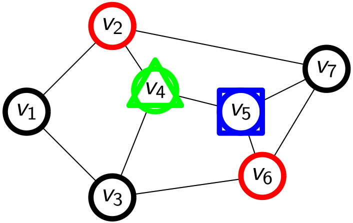


全順序 σ : v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

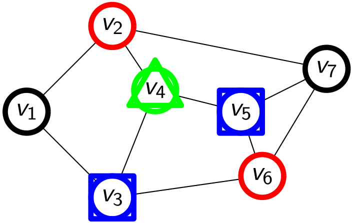


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

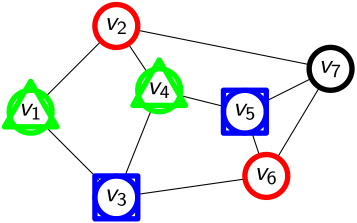


全順序 σ : v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例

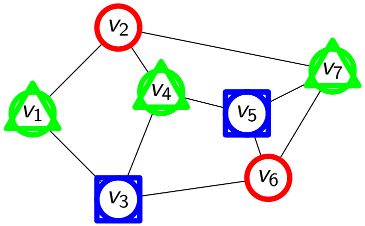


全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色

- 頂点集合上の全順序 σ を 1 つ固定する．使う色は $\{1, 2, \ldots\}$
- その頂点の隣接点の色と違い，既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- 既に使った色で塗れない場合は，新しい色で塗る

実行例



全順序 σ: v_2 v_6 v_5 v_4 v_3 v_1 v_7

貪欲彩色の性能評価

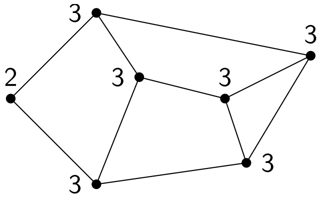
貪欲彩色が費やす色数の上界

任意の無向グラフ $G = (V, E)$ と V 上の任意の全順序 σ に対して，

$$\chi(G) \leq \begin{array}{l}\sigma \text{ に従う } G \text{ の貪欲} \\ \text{彩色が費やす色数}\end{array} \leq \Delta(G) + 1$$

復習：最大次数とは？

無向グラフ G の**最大次数** $\Delta(G)$ とは，その頂点の次数の最大値



$\Delta(G) = 3$

貪欲彩色の柔軟性

観察

貪欲彩色の出力は全順序 σ に依存する

つまり，σ を変えると，異なる彩色が得られる (かもしれない)

事実 (前回の演習問題)

うまく全順序を選べば，貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり，染色数を計算するためには，うまい全順序を見つければよい

今からやること

- そのようなうまい全順序をどう見つけるか？ (今回)
- その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？ (前回)

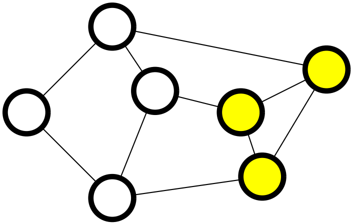
実は，いつもうまくいくとは限らないが，うまくいく場合を紹介する

クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G の**クリーク**とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G の**クリーク数**と呼ぶ)

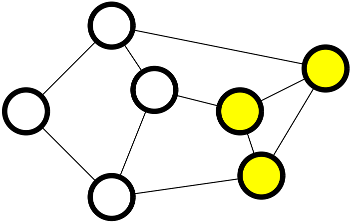


クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G の**クリーク**とは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G の**クリーク数**と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

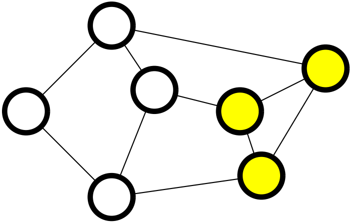
なぜか？

クリーク

グラフのクリークとは？

無向グラフ G のクリークとは，頂点部分集合 C で，
その中のどの 2 頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を $\omega(G)$ で表す (G のクリーク数と呼ぶ)



観察 (弱双対性)

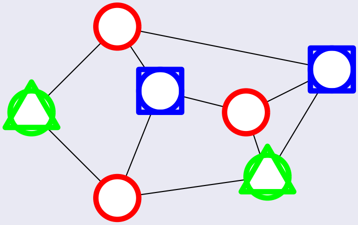
- C が G のクリークである
  $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感：C の部分だけで $\chi(G)$ 色は必要となる

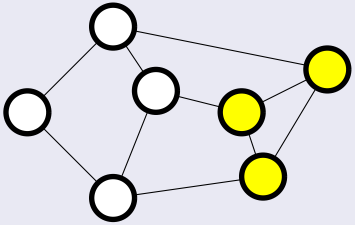
彩色が最適であることの確認法

$\chi(G)$ の上界



3 色で塗れた
$\therefore \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)$ の下界



頂点数 3 のクリークを見つけた
$\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$\therefore \chi(G) = 3$

概要

今日の目標

グラフの彩色を用いたモデル化

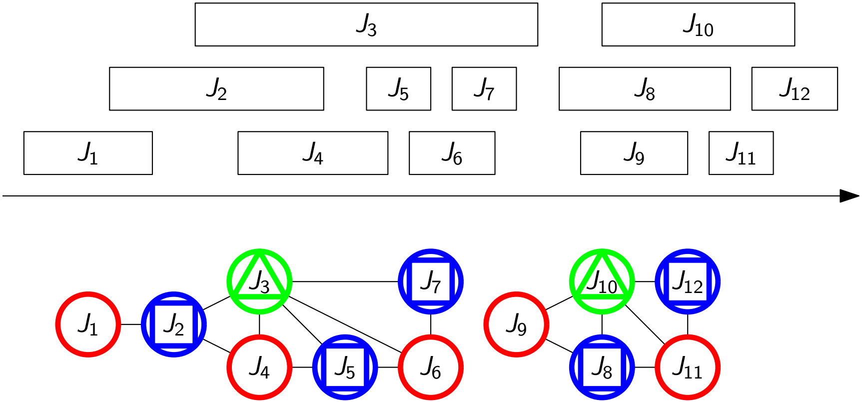
- ジョブスケジューリング
(区間グラフの彩色)
- 移動体通信における周波数割当
(単位円グラフの彩色)

格言

現実世界をモデル化するグラフには特有の性質がある

目次

彩色が現れる場面：ジョブスケジューリング

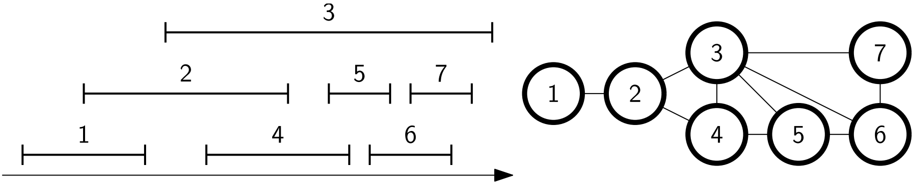


ジョブスケジューリングと区間グラフ

定義：区間グラフ

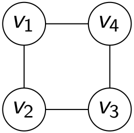
区間グラフとは次のようにして構成できる無向グラフ G

- G の各頂点は数直線上の閉区間に対応
- G の各辺は 2 つの交わる区間に対応



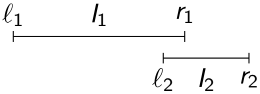
すべてのグラフが区間グラフであるわけではない

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



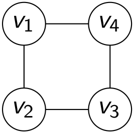
注

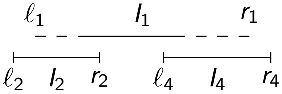
区間 $I_1 = [\ell_1, r_1]$ と $I_2 = [\ell_2, r_2]$ が交わる (ただし，$\ell_1 \leq \ell_2$) $\Leftrightarrow$ $\ell_2 \leq r_1$



すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)





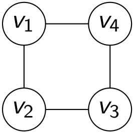
証明：これが区間グラフであると仮定し，v_i に対応する区間を I_i とする

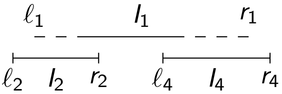
- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする

- これは矛盾 □

すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



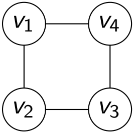


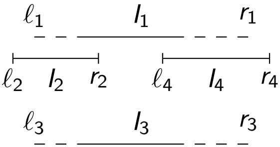
証明：これが区間グラフであると仮定し，v_i に対応する区間を I_i とする

- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  I_1, I_2, I_4 が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- これは矛盾 □

すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)





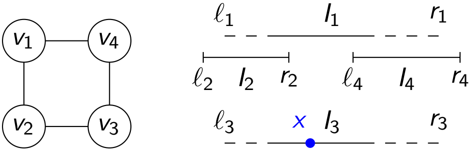
<u>証明</u>：これが区間グラフであると仮定し，v_i に対応する区間を I_i とする

- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  I_1, I_2, I_4 が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 I_3 は I_2, I_4 と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．

- これは矛盾 □

すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)



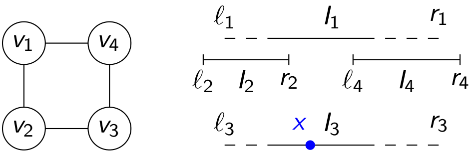
証明：これが区間グラフであると仮定し，v_i に対応する区間を I_i とする

- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  I_1, I_2, I_4 が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 I_3 は I_2, I_4 と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．

- これは矛盾 □

すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)

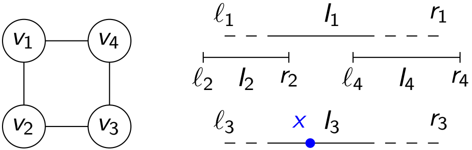


証明：これが区間グラフであると仮定し，v_i に対応する区間を I_i とする

- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  I_1, I_2, I_4 が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 I_3 は I_2, I_4 と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．
- よって，$\ell_1 < x < r_1$ となり，$x \in I_1$ であるので，I_1 と I_3 は交わる
- これは矛盾 □

すべてのグラフが区間グラフであるわけではない：証明

次のグラフは区間グラフではない (対応する区間の集合がない)

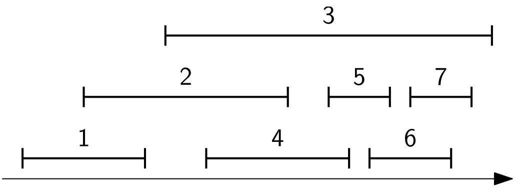


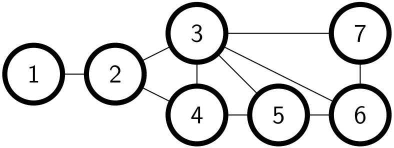
<u>証明</u>：これが区間グラフであると仮定し，v_i に対応する区間を I_i とする

- 区間 I_i の左端を ℓ_i，右端を r_i とする
- 対称性を考慮すると，一般性を失わずに，
  I_1, I_2, I_4 が $\ell_1 \leq r_2 < \ell_4 \leq r_1$ を満たすように置かれると仮定してよい
- 区間 I_3 は I_2, I_4 と交わるので，$\ell_3 \leq r_2$ と $\ell_4 \leq r_3$ を満たす．
- すなわち，ある点 $x \in I_3$ が存在して，$r_2 < x < \ell_4$ となる．
- よって，$\ell_1 < x < r_1$ となり，$x \in I_1$ であるので，I_1 と I_3 は交わる
- 一方，v_1 と v_3 は隣接しないので，これは矛盾 □

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



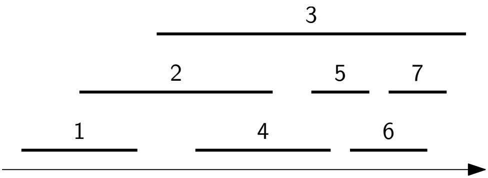


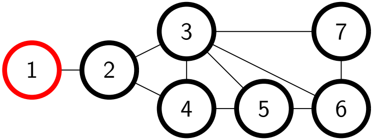
疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
それを左から順にならべた順序を考える



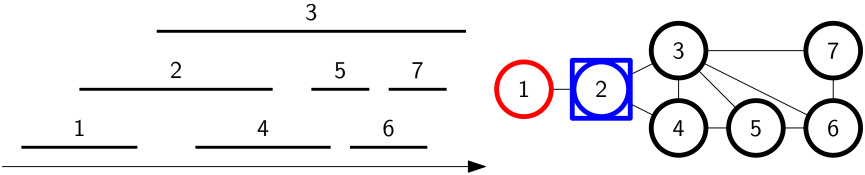


疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える

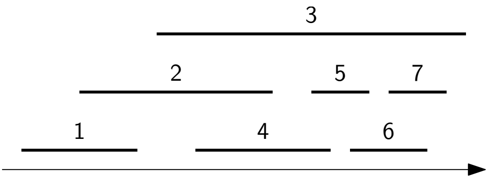


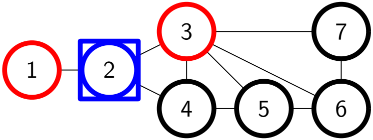
疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



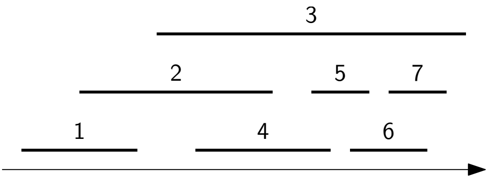


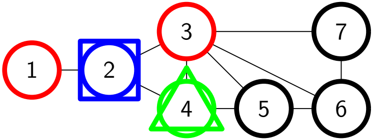
疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える



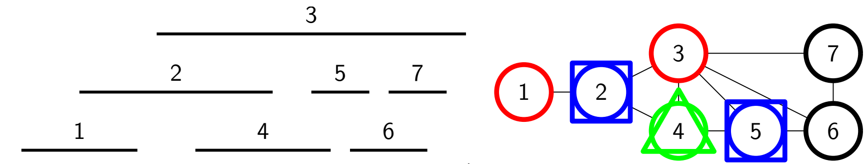


疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える

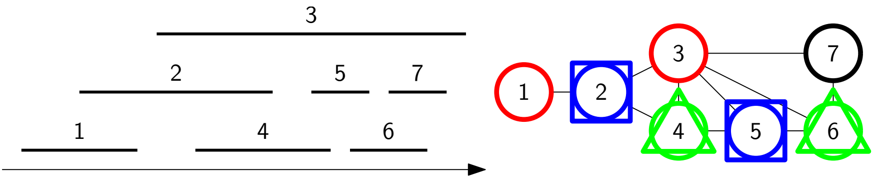


疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える

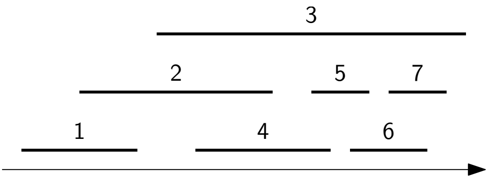


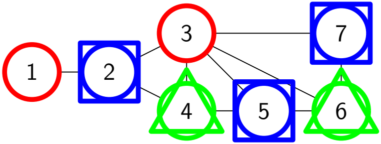
疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

区間グラフと貪欲彩色：頂点順序

- 頂点に対応する区間の左端を見て，
  それを左から順にならべた順序を考える





疑問

この彩色はどれだけ色を使うのか？

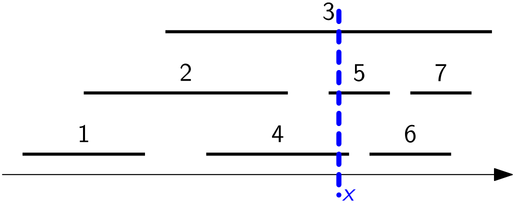
区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (1)

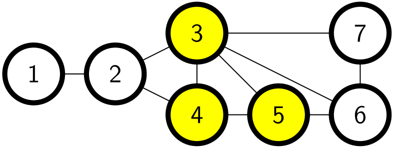
区間グラフと貪欲彩色

任意の区間グラフ G に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \le k$)

- 観察：数直線上の 1 点 x を含む区間はクリーク





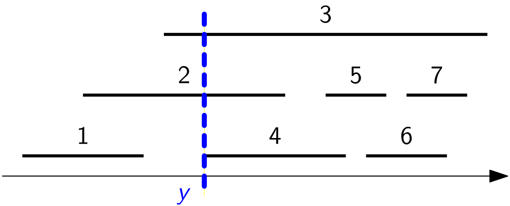
区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

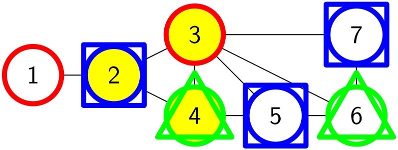
区間グラフと貪欲彩色

任意の区間グラフ G に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- I を色 k で塗られた最初の頂点に対応する区間として，その左端を y とする





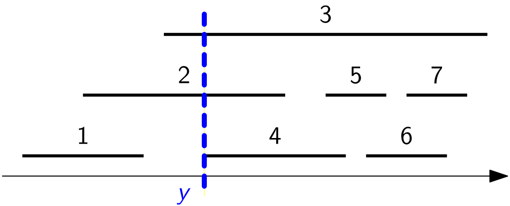
区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

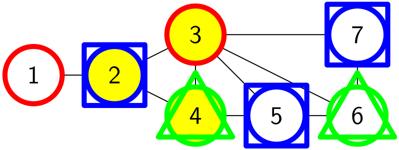
区間グラフと貪欲彩色

任意の区間グラフ G に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- I を色 k で塗られた最初の頂点に対応する区間として，その左端を y とする
- y を含む区間の集合は G のクリークであるので，弱双対性より，y を含む区間の総数 $\leq \chi(G)$





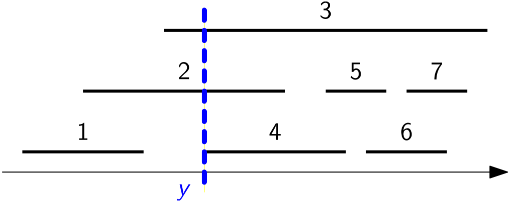
区間グラフと貪欲彩色：性能解析 (2)

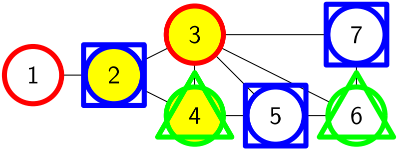
区間グラフと貪欲彩色

任意の区間グラフ G に対して，前ページの規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

証明：使用した色が $1, 2, \ldots, k$ であるとする (よって，$\chi(G) \leq k$)

- I を色 k で塗られた最初の頂点に対応する区間として，その左端を y とする
- y を含む区間の集合は G のクリークであるので，弱双対性より，y を含む区間の総数 $\leq \chi(G) \leq k$





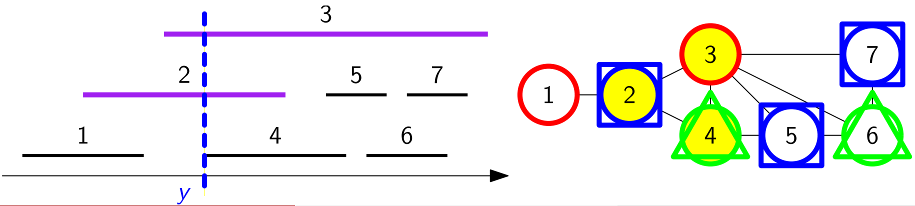
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

主張

y を含む区間の総数 $= k$ (つまり，頂点数 k のクリークが存在)

主張の証明

- I と交わり，I の左端 y よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
 (∵ I に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 k で塗られた)



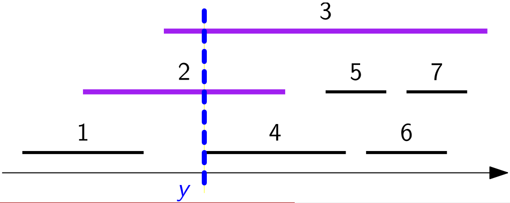
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

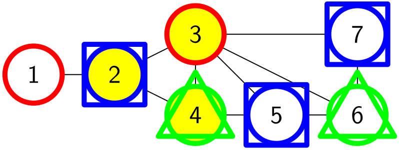
主張

y を含む区間の総数 $= k$ (つまり，頂点数 k のクリークが存在)

主張の証明

- I と交わり，I の左端 y よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ I に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 k で塗られた)
- そのような区間はどれも y を含む





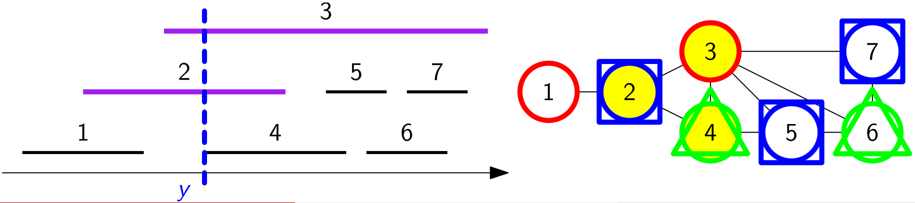
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

主張

y を含む区間の総数 $= k$　　　(つまり，頂点数 k のクリークが存在)

主張の証明

- I と交わり，I の左端 y よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, ..., k-1$ で塗られている
  ($\because$ I に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 k で塗られた)
- そのような区間はどれも y を含む
- $\therefore$ そのような区間の総数 $= k - 1$



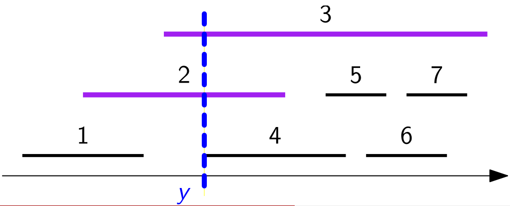
区間グラフと貪欲アルゴリズム：性能解析 (3)

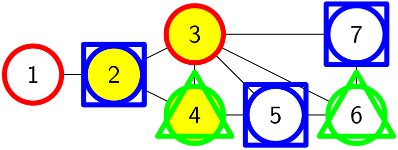
主張

y を含む区間の総数 $= k$ (つまり，頂点数 k のクリークが存在)

<u>主張の証明</u>

- I と交わり，I の左端 y よりも左端が左にある区間に対応する頂点は $1, 2, \ldots, k-1$ で塗られている
  ($\because$ I に対応する頂点が貪欲彩色によって初めて色 k で塗られた)
- そのような区間はどれも y を含む
- $\therefore$ そのような区間の総数 $= k - 1$
- $\therefore$ y を含む区間の総数 $= k$ $\square$

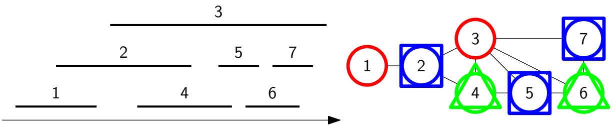




区間グラフと貪欲彩色：まとめ

貪欲彩色で用いるとよい頂点順序

頂点に対応する区間の左端を見て，それを左から順にならべた順序



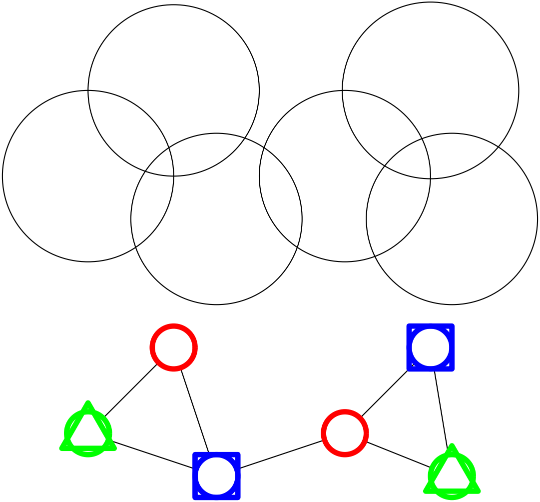
定理

任意の区間グラフ G に対して，この規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，色数最小の彩色が得られる

- これは「区間グラフ」に対する定理
- 他のグラフには当てはまらない

目次

彩色が現れる場面：移動体通信における周波数割当

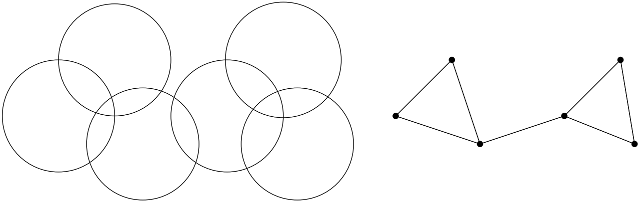


周波数割当と単位円グラフ

定義：単位円グラフ

単位円グラフとは次のようにして構成できる無向グラフ G

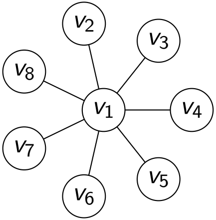
- G の各頂点は平面上の単位円に対応
- G の各辺は 2 つの交わる単位円に対応



注：単位円の半径は 1

すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない

次のグラフは単位円グラフではない (対応する単位円の集合がない)

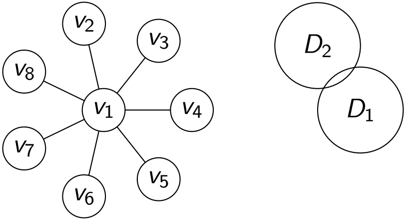


注

中心を p, q とする 2 つの単位円が交わる $\Leftrightarrow$ p, q の距離が 2 以下

ポイント：$v_2, \ldots, v_8$ の間には辺がない

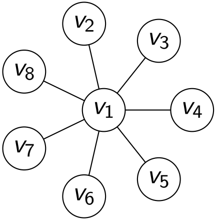
すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)

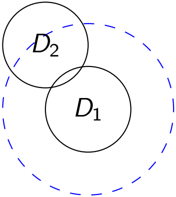


証明：これが単位円グラフであると仮定し，v_i に対応する単位円を D_i とする

- 単位円 D_1 と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない

すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)

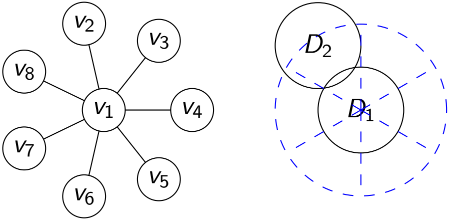




証明：これが単位円グラフであると仮定し，v_i に対応する単位円を D_i とする

- 単位円 D_1 と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない
- $D_2, \ldots, D_8$ の中心は，D_1 の中心を中心とする半径 2 の円の中にある

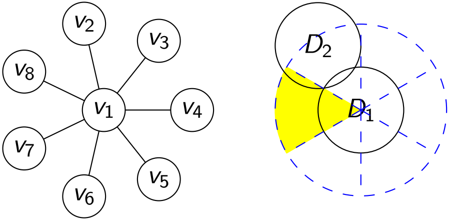
すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)



証明：これが単位円グラフであると仮定し，v_i に対応する単位円を D_i とする

- 単位円 D_1 と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない
- $D_2, \ldots, D_8$ の中心は，D_1 の中心を中心とする半径 2 の円の中にある
- その半径 2 の円を頂角を 60 度とする扇形 6 つに分割する

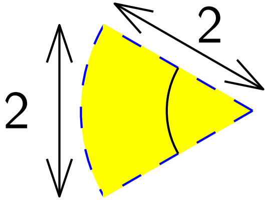
すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (1)



証明：これが単位円グラフであると仮定し，v_i に対応する単位円を D_i とする

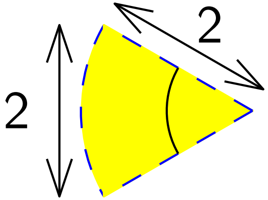
- 単位円 D_1 と交わるように他の単位円 $D_2, \ldots, D_8$ は置かれなくてはならない
- $D_2, \ldots, D_8$ の中心は，D_1 の中心を中心とする半径 2 の円の中にある
- その半径 2 の円を頂角を 60 度とする扇形 6 つに分割する
- どこか 1 つの扇形には $D_2, \ldots, D_8$ の 2 つの円の中心が含まれる

すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (2)



- この扇形の中のどの 2 点間の距離も 2 以下

すべてのグラフが単位円グラフであるわけではない：証明 (2)



- この扇形の中のどの 2 点間の距離も 2 以下
- ∴ この扇形の中に中心を持つ 2 つの単位円は交わる
- それらに対応する頂点が辺で結ばれないことに矛盾 □

単位円グラフと貪欲彩色

定理 2 (Marathe et al. 1994)

任意の単位円グラフ $G = (V, E)$ と任意の頂点順序に対して，

$$\text{貪欲彩色が費やす色数 } \mathrm{ALG} \leq 6 \cdot \chi(G) - 5$$

この定理は貪欲彩色が費やす色数の相対誤差に対して理論保証を与える

$$\left| \frac{\mathrm{ALG} - \chi(G)}{\chi(G)} \right| \leq 5 - \frac{5}{\chi(G)}$$

格言

数学の強みは，理論保証を与えられること

単位円グラフと貪欲彩色：証明 (1)

- 貪欲彩色の性質から，$\mathrm{ALG} \leq \Delta(G) + 1$ であることは既に分かった

今から示すこと

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

これが示せたと仮定すると

- $\Delta(G) \leq 6\chi(G) - 6$
- $\therefore \mathrm{ALG} \leq \Delta(G) + 1 \leq 6 \cdot \chi(G) - 5$ $\square$

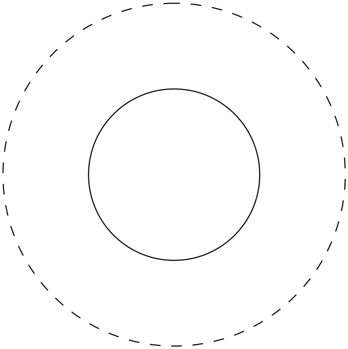
証明が終わる

単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 v を見る
  (v の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)

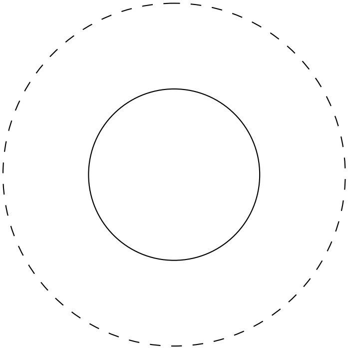


単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 v を見る
  (v の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- v の隣接頂点の中で,
  同じ色を持つものの数 ≤ 6

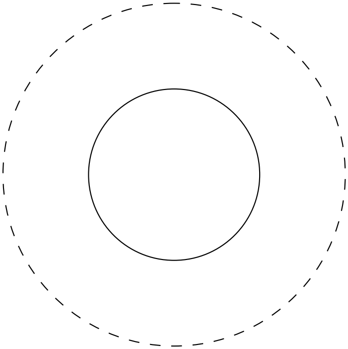


単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 v を見る
  (v の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- v の隣接頂点の中で,
  同じ色を持つものの数 ≤ 6
- $\because$ v に対応する円の周りを
  60 度ずつ区切ったとき,
  同じ扇に中心を持つ円は
  同じ色で塗れない

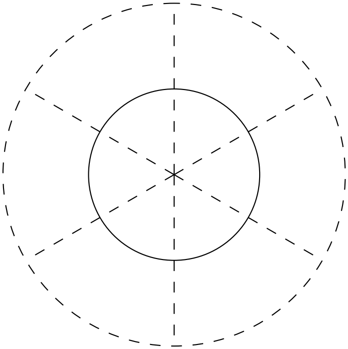


単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 v を見る (v の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- v の隣接頂点の中で, 同じ色を持つものの数 ≤ 6
- $\because$ v に対応する円の周りを 60 度ずつ区切ったとき, 同じ扇に中心を持つ円は同じ色で塗れない

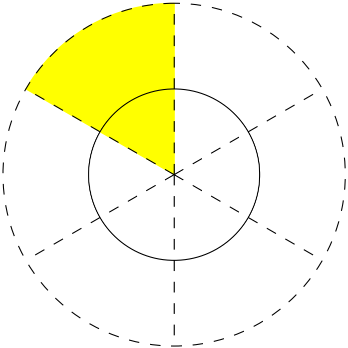


単位円グラフと貪欲彩色：証明 (2)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- 色数最小の彩色を考える
- 最大次数の頂点 v を見る
  (v の隣接頂点数 $= \Delta(G)$)
- v の隣接頂点の中で，
  同じ色を持つものの数 ≤ 6
- $\because$ v に対応する円の周りを
  60 度ずつ区切ったとき，
  同じ扇に中心を持つ円は
  同じ色で塗れない



単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore$ v の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$

単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore$ v の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$
- $\therefore$ v も含めて使われる色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$

単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

今から示すこと (再掲)

$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore$ v の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$
- $\therefore$ v も含めて使われる色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$
- $\therefore$ この彩色の色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$

単位円グラフと貪欲彩色：証明 (3)

今から示すこと (再掲)

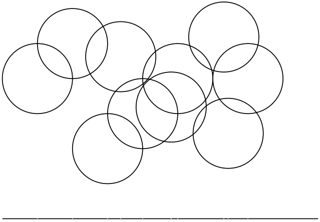
$$\chi(G) \geq \frac{\Delta(G)}{6} + 1$$

- $\therefore$ v の隣接頂点全体に使われる色数 $\geq \Delta(G)/6$
- $\therefore$ v も含めて使われる色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$
- $\therefore$ この彩色の色数 $\geq \Delta(G)/6 + 1$
- $\therefore$ $\chi(G) \geq \Delta(G)/6 + 1$ $\square$

単位円グラフと貪欲彩色：補足

貪欲彩色で用いるとよい頂点順序

頂点に対応する単位円の中心を見て，それを左から順にならべた順序



事実 (発展演習問題)

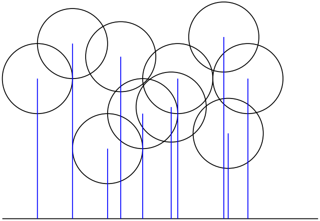
任意の単位円グラフ G に対して，この規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，その色数は $3\chi(G) - 2$ 以下になる

- これは「単位円グラフ」に対する定理
- 他のグラフには当てはまらない

単位円グラフと貪欲彩色：補足

貪欲彩色で用いるとよい頂点順序

頂点に対応する単位円の中心を見て，それを左から順にならべた順序



事実 (発展演習問題)

任意の単位円グラフ G に対して，この規則で定めた全順序を用いて貪欲彩色を実行すると，その色数は $3\chi(G) - 2$ 以下になる

- これは「単位円グラフ」に対する定理
- 他のグラフには当てはまらない

目次

今日のまとめ

今日の目標

グラフの彩色を用いたモデル化

- ジョブスケジューリング
  (区間グラフの彩色)
- 移動体通信における周波数割当
  (単位円グラフの彩色)

格言 (再掲)

現実世界をモデル化するグラフには特有の性質がある

残った時間の使い方

- 演習問題をやる
  - 相談推奨 (ひとりでやらない)
- 質問をする
  - 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- 退室時，小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - 内容は何でも OK
  - 匿名で OK

目次