

グラフとネットワーク 第 10 回  
彩色：数理

岡本 吉央  
okamotoy@uec.ac.jp

電気通信大学

2015 年 6 月 29 日

最終更新：2015 年 7 月 2 日 06:25

- |   |              |        |
|---|--------------|--------|
| 1 | グラフの定義と次数：数理 | (4/13) |
| 2 | 道と閉路：数理      | (4/20) |
| 3 | 木：数理         | (4/27) |
| * | みどりの日で休み     | (5/4)  |
| 4 | マッチング：数理     | (5/11) |
| 5 | マッチング：モデル化   | (5/16) |
| 6 | 最大流：数理       | (5/25) |
| 7 | 最大流：モデル化 (1) | (6/1)  |
| ● | 中間試験         | (6/8)  |

注意：予定の変更もありうる

## スケジュール 後半 (予定)

- |    |              |         |
|----|--------------|---------|
| 8  | 最大流：モデル化 (2) | (6/15)  |
| 9  | 全域木：数理とモデル化  | (6/22)  |
| 10 | 彩色：数理        | (6/29)  |
| 11 | 彩色：モデル化      | (7/6)   |
| 12 | 平面グラフ：数理     | (7/13)  |
|    | * 海の日で休み     | (7/20)  |
| 13 | 平面グラフ：モデル化   | (7/27)  |
| 14 | 予備日 (講義は行う)  | (8/3)   |
|    | ● 期末試験       | (8/10?) |

注意：予定の変更もありうる

### 今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- ▶ 彩色と染色数
- ▶ 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- ▶ 貪欲彩色による上界

## 目次

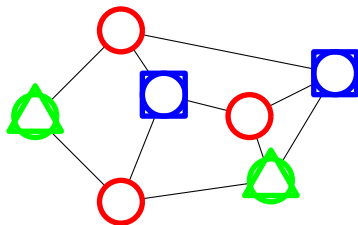
- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

## 無向グラフの彩色

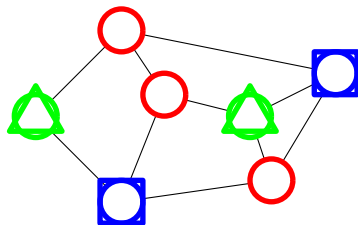
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

彩色とは？ (直感的な定義)

$G$  の彩色 (さいしょく) とは、  
 $G$  の頂点への色の割当てで、各辺の両端点の色が異なるもの



彩色である



彩色ではない

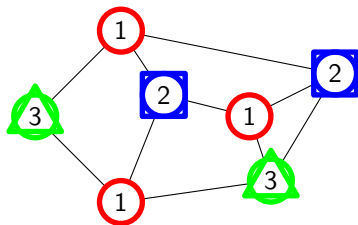
彩色において、同じ色を持つ頂点の集合を彩色クラスとも呼ぶ

## 無向グラフの彩色：形式的な定義

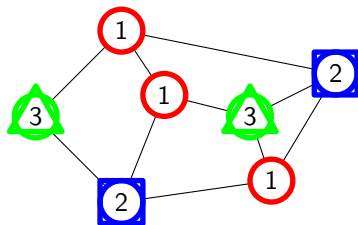
無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

彩色とは？ (形式的な定義)

$G$  の  $k$  彩色とは, 写像  $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  で,  
任意の辺  $\{u, v\} \in E$  に対して  $c(u) \neq c(v)$  を満たすもの



3 彩色である



3 彩色ではない

$c$  の終域  $\{1, \dots, k\}$  を **パレット** と呼ぶことがある

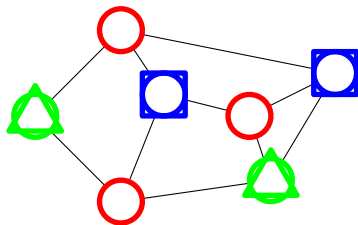
## 彩色可能性

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

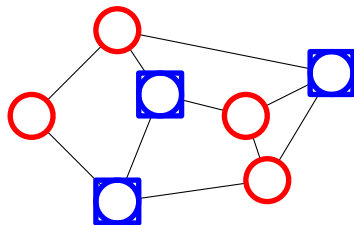
## 彩色可能性とは？

$G$  が  $k$  彩色可能であるとは,  $G$  の  $k$  彩色が存在すること

このグラフは 3 彩色可能である



3 彩色である



2 彩色は存在しない

注:  $G$  が  $k$  彩色可能  $\Rightarrow G$  は  $k + 1$  彩色可能



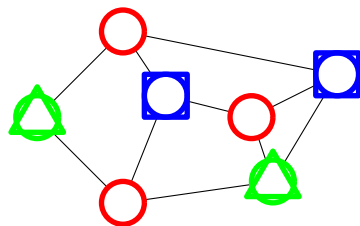
## 染色数

無向グラフ  $G = (V, E)$

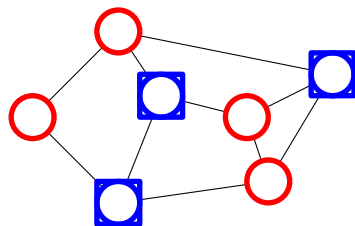
## 染色数とは？

$G$  の染色数とは、 $G$  の  $k$  彩色が存在するような最小の  $k$

$G$  の染色数を  $\chi(G)$  で表す



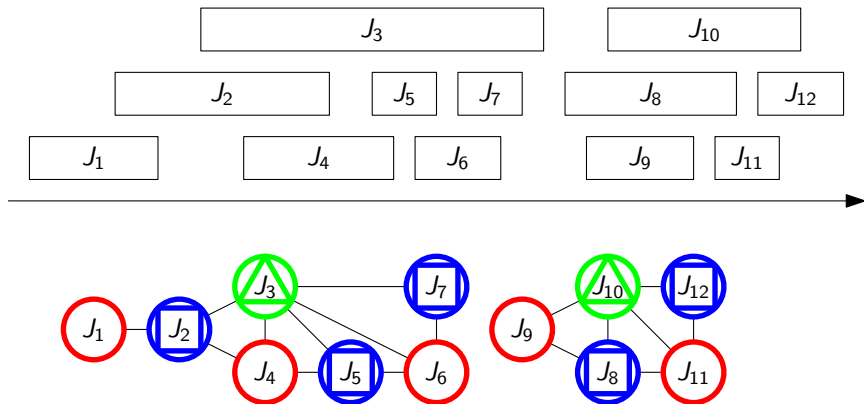
3 彩色である



2 彩色は存在しない

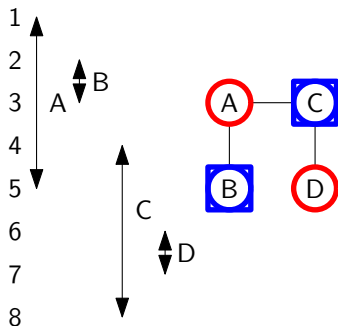
$\therefore$  このグラフの染色数は 3

# 彩色が現れる場面 (1) : ジョブスケジューリング



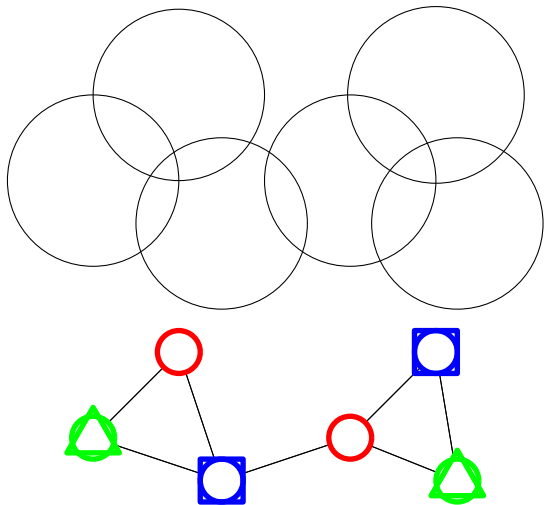
## 彩色が現れる場面 (2) : レジスタ割当

- 1:  $A = 2$
- 2:  $B = 3$
- 3:  $B = B + 2$
- 4:  $C = A + 1$
- 5:  $A = C + 3$
- 6:  $D = 4$
- 7:  $D = C + 2$
- 8:  $C = 3$



- 1:  $R1 = 2$
- 2:  $R2 = 3$
- 3:  $R2 = R2 + 2$
- 4:  $R2 = R1 + 1$
- 5:  $R1 = R2 + 3$
- 6:  $R1 = 4$
- 7:  $R1 = R2 + 2$
- 8:  $R2 = 3$

彩色が現れる場面 (3) : 移動体通信における周波数割当



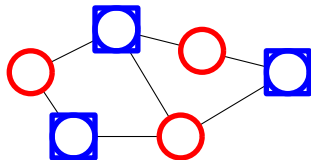
## 2 彩色可能性と二部グラフ

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

## 2 彩色可能性に対する必要十分条件

 $G$  は 2 彩色可能  $\Leftrightarrow G$  は二部グラフ「 $\Rightarrow$ 」の証明： $G$  は 2 彩色可能であるとする

- ▶  $G$  の 2 彩色を 1 つ考え、その彩色クラスを  $A, B$  とする
- ▶  $A$  の 2 頂点は辺で結ばれず、 $B$  の 2 頂点も辺で結ばれない
- ▶  $\therefore G$  は  $A, B$  を部集合とする二部グラフである



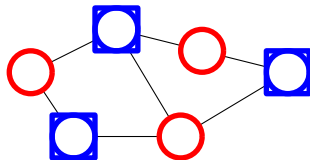
## 2 彩色可能性と二部グラフ (続)

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

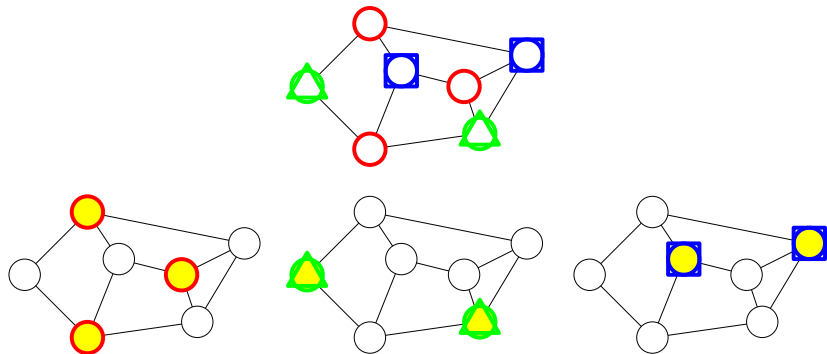
## 2 彩色可能性に対する必要十分条件

 $G$  は 2 彩色可能  $\Leftrightarrow G$  は二部グラフ「 $\Leftarrow$ 」の証明： $G$  は二部グラフであるとする

- ▶  $G$  の部集合を  $A, B$  とする
- ▶  $A$  の 2 頂点は辺で結ばれず,  $B$  の 2 頂点も辺で結ばれない
- ▶  $\therefore G$  は  $A, B$  を彩色クラスとする 2 彩色を持つ □



## 彩色クラスと独立集合



彩色の彩色クラスは独立集合

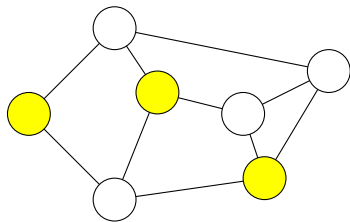
(互いに隣接していない頂点から成る部分集合)

## 独立集合

無向グラフ  $G = (V, E)$ 

独立集合とは？

$G$  の独立集合とは、頂点部分集合  $I \subseteq V$  で、  
任意の異なる 2 頂点  $u, v \in I$  に対して  $\{u, v\} \notin E$





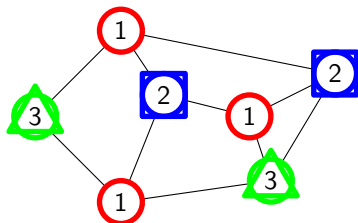
## 無向グラフの彩色：独立集合を用いた定義

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

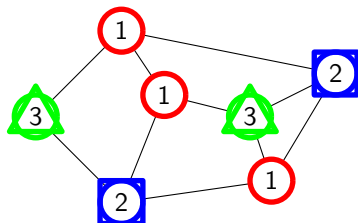
彩色とは？ (独立集合を用いた定義)

$G$  の  $k$  彩色とは,  
 $k$  個の独立集合  $I_1, \dots, I_k$  への頂点集合  $V$  の分割

- ▶  $V = I_1 \cup \dots \cup I_k$
- ▶ 任意の  $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$  に対して,  $I_i \cap I_j = \emptyset$



3 彩色である



3 彩色ではない

## 目次

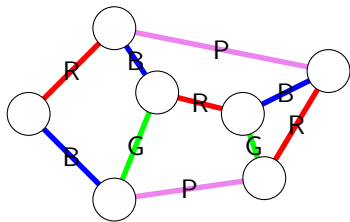
- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

## 無向グラフの辺彩色

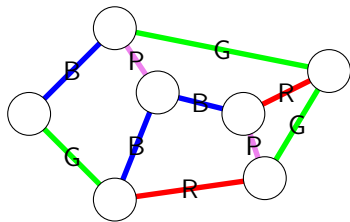
無向グラフ  $G = (V, E)$ 

辺彩色とは？ (直感的な定義)

$G$  の**辺彩色** (さいしょく) とは,  
 $G$  の**辺**への色の割当てで、端点を共有する辺の色が異なるもの



辺彩色である



辺彩色ではない

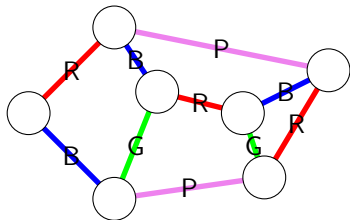
辺彩色において、同じ色を持つ辺の集合を**彩色クラス**とも呼ぶ

## 無向グラフの辺彩色：形式的な定義

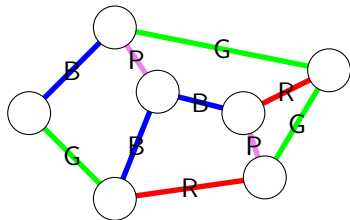
無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

## 辺彩色とは？ (形式的な定義)

$G$  の  $k$  辺彩色とは, 写像  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  で,  
端点を共有する任意の辺  $e, f \in E$  に対して  $c(e) \neq c(f)$  を満たすもの



4 辺彩色である



4 辺彩色ではない

$c$  の終域  $\{1, \dots, k\}$  を **パレット** と呼ぶことがある

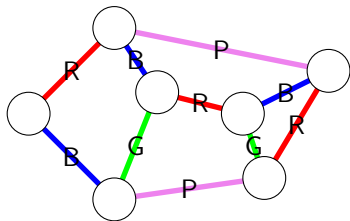
## 辺彩色可能性

無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

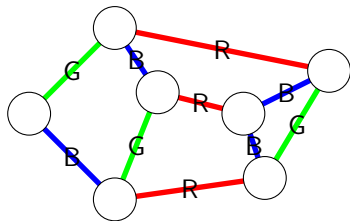
辺彩色可能性とは？

$G$  が  $k$  辺彩色可能であるとは、 $G$  の  $k$  辺彩色が存在すること

このグラフは 4 辺彩色可能である



4 辺彩色である



3 辺彩色は存在しない

注： $G$  が  $k$  辺彩色可能  $\Rightarrow G$  は  $k + 1$  辺彩色可能

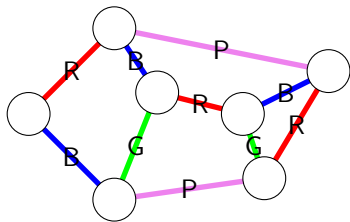
## 辺染色数

無向グラフ  $G = (V, E)$

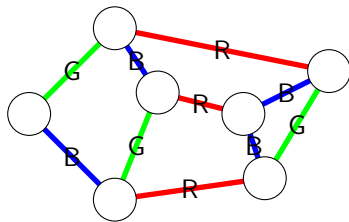
染色数とは？

$G$  の**辺染色数**とは、 $G$  の  $k$  辺彩色が存在するような最小の  $k$

$G$  の辺染色数を  $\chi'(G)$  で表す



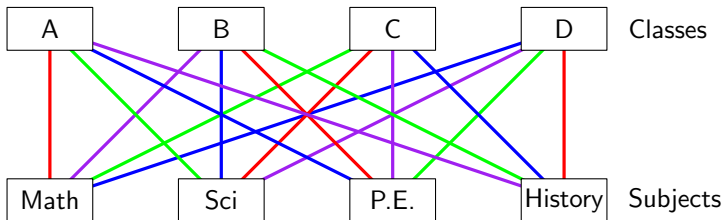
4 辺彩色である



3 辺彩色は存在しない

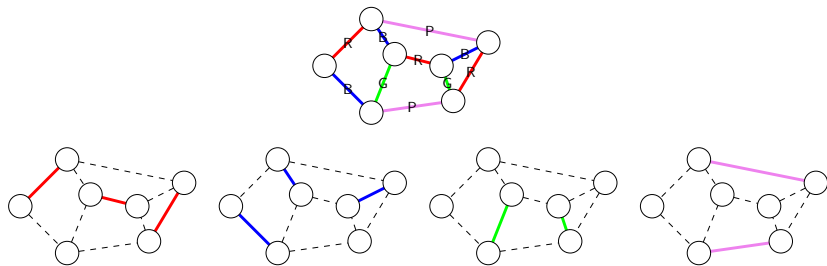
$\therefore$  このグラフの辺染色数は 4

## 辺彩色が現れる場面：時間割作成



		A	B	C	D
<span style="color: red;">■</span>	1	Math	P.E.	Sci	History
<span style="color: green;">■</span>	2	Sci	History	Math	P.E.
<span style="color: blue;">■</span>	3	P.E.	Sci	History	Math
<span style="color: purple;">■</span>	4	History	Math	P.E.	Sci

## 彩色クラスとマッチング



辺彩色の各彩色クラスはマッチング

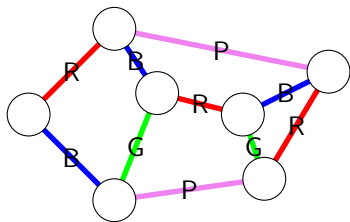


## 無向グラフの辺彩色：マッチングを用いた定義

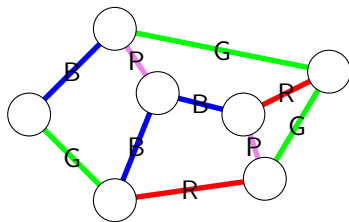
無向グラフ  $G = (V, E)$ , 自然数  $k$

辺彩色とは？ (マッチングを用いた定義)

$G$  の  $k$  辺彩色とは,  
 $k$  個のマッチング  $M_1, \dots, M_k$  への辺集合  $E$  の分割



4 辺彩色である



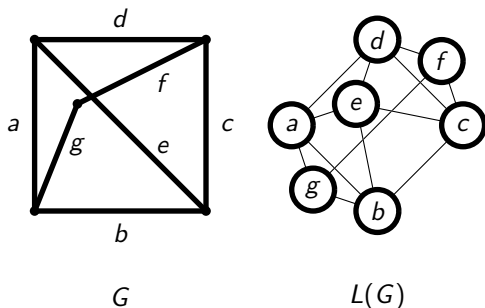
4 辺彩色ではない

## 辺彩色は彩色の特殊な場合

## 線グラフ

無向グラフ  $G = (V, E)$  の線グラフ  $L(G)$  とは

- ▶ 頂点集合が  $E$  であり,
- ▶ 辺集合が  $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1 \text{ と } e_2 \text{ が共通端点を持つ}\}$

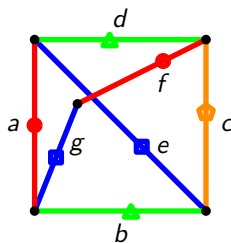


## 辺彩色は彩色の特殊な場合

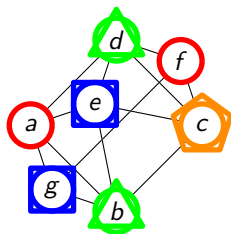
## 線グラフ

無向グラフ  $G = (V, E)$  の線グラフ  $L(G)$  とは

- ▶ 頂点集合が  $E$  であり,
- ▶ 辺集合が  $\{\{e_1, e_2\} \mid e_1 \text{ と } e_2 \text{ が共通端点を持つ}\}$



G

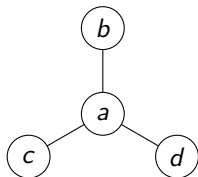


L(G)

$G$  の辺彩色  $\leftrightarrow L(G)$  の彩色

すべてのグラフが線グラフであるわけではない

次のグラフは線グラフではない (対応する元のグラフがない)



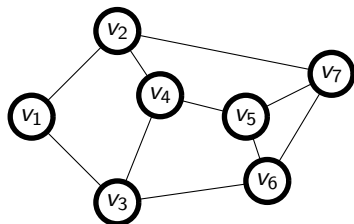
## 目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

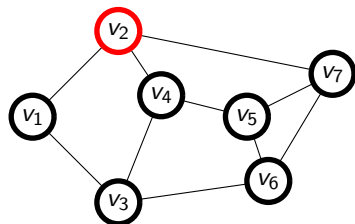


全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

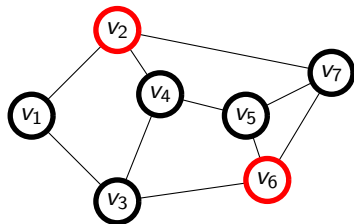


全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例



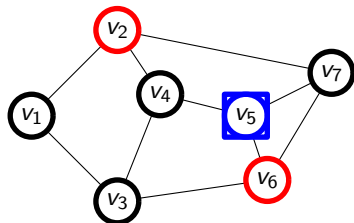
全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$



## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

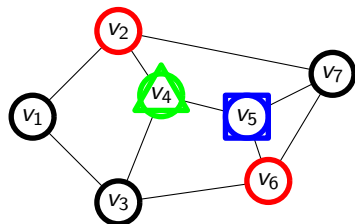


全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

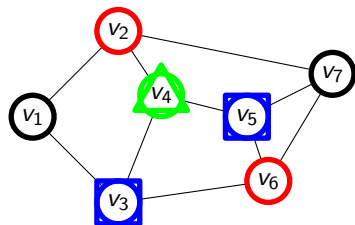


全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

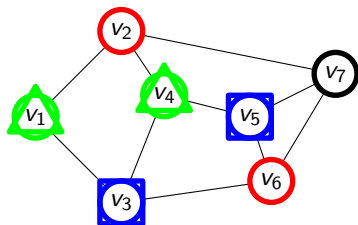


全順序  $\sigma$ :  $V_2 \ V_6 \ V_5 \ V_4 \ V_3 \ V_1 \ V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

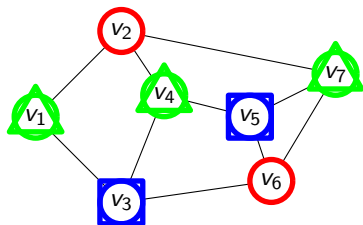


全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

## 実行例

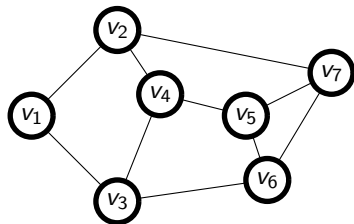


全順序  $\sigma$ :  $V_2 V_6 V_5 V_4 V_3 V_1 V_7$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

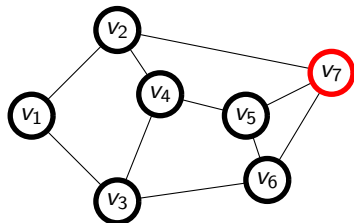


全順序  $\sigma$ :  $V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

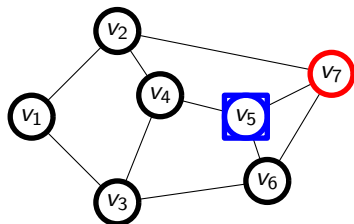


全順序  $\sigma$ :  $V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)



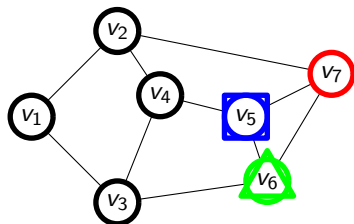
全順序  $\sigma$ :  $V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$



## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

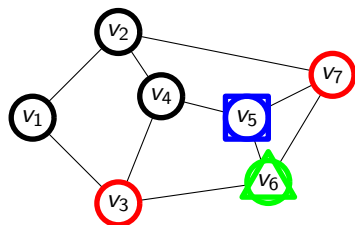


全順序  $\sigma: V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

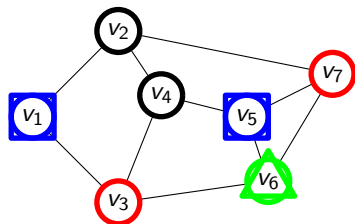


全順序  $\sigma: V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

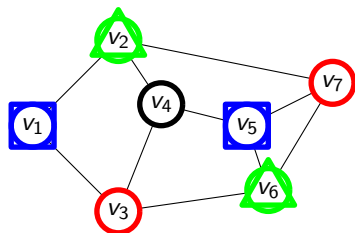


全順序  $\sigma: V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)

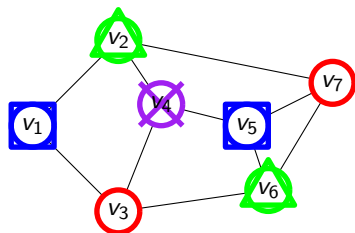


全順序  $\sigma: V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色

- ▶ 頂点集合上の全順序  $\sigma$  を 1 つ固定する. 使う色は  $\{1, 2, \dots\}$
- ▶ その頂点の隣接点の色と違い, 既に使った色の中で最も小さな色で塗る
- ▶ 既に使った色で塗れない場合は, 新しい色で塗る

実行例 (別の順序)



全順序  $\sigma: V_7 V_5 V_6 V_3 V_1 V_2 V_4$

## 貪欲彩色の性能評価

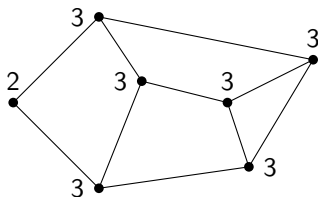
## 貪欲彩色が費やす色数の上界

任意の無向グラフ  $G = (V, E)$  と  $V$  上の任意の全順序  $\sigma$  に対して,

$$\chi(G) \leq \begin{array}{l} \sigma \text{ に従う } G \text{ の貪欲} \\ \text{彩色が費やす色数} \end{array} \leq \Delta(G) + 1$$

## 復習：最大次数とは？

無向グラフ  $G$  の**最大次数**  $\Delta(G)$  とは、その頂点の次数の最大値

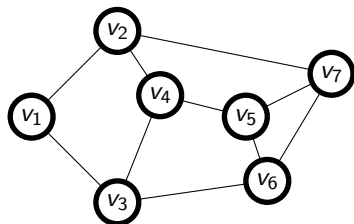


$$\Delta(G) = 3$$

## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

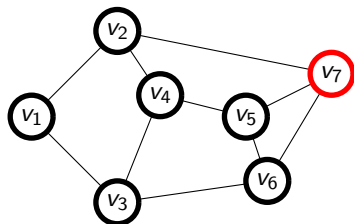
- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない □



## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない  $\square$

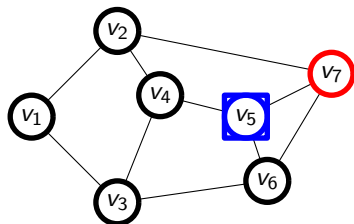




## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

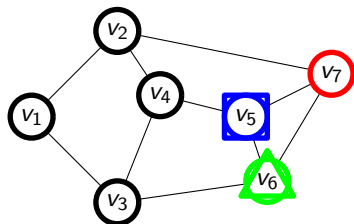
- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない  $\square$



## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

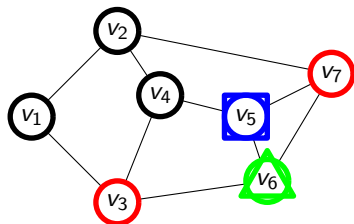
- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない □



## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

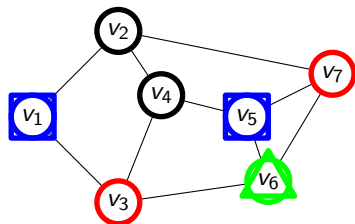
- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない □



## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

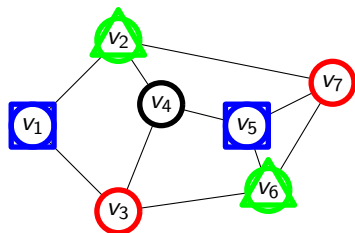
- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない  $\square$



## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

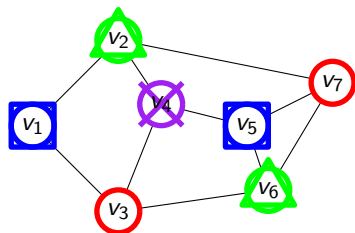
- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない □



## 貪欲彩色の性能評価：証明

パレットは  $\{1, 2, \dots, \Delta(G) + 1\}$

- ▶ 任意の頂点  $v$  に色を塗る瞬間を考える
- ▶  $v$  の隣接頂点とは違う色を  $v$  に塗る
- ▶  $v$  の隣接頂点に使われる色の数  $\leq \deg_G(v)$  (次数)
- ▶  $\therefore v$  を塗るために必要な色は  $1, 2, \dots, \deg_G(v) + 1$  の中にある
- ▶  $\therefore$  どの頂点も  $1, 2, \dots, \Delta(G) + 1$  の中の色で塗れる  
( $\because \deg_G(v) \leq \Delta(G)$ )
- ▶ よって、貪欲彩色は多くても  $\Delta(G) + 1$  色しか費やさない □



## 貪欲彩色の柔軟性

## 観察

貪欲彩色の出力は全順序  $\sigma$  に依存する

つまり、 $\sigma$  を変えると、異なる彩色が得られる (かもしれない)

## 事実 (演習問題)

うまく全順序を選べば、貪欲彩色の費やす色数が染色数になる

つまり、染色数を計算するためには、うまい全順序を見つければよい

## 今からやること

- ▶ そのようなうまい全順序をどう見つけるか？ (次回)
- ▶ その全順序が与える彩色が「最適」であることを確認するための証拠は何か？

実は、いつもうまくいくとは限らないが、うまくいく場合を紹介する

## 目次

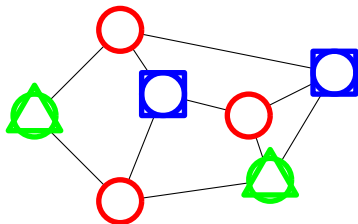
- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ



## 彩色の最適性

## 染色数とは？ (再掲)

無向グラフ  $G$  の染色数とは、 $G$  の  $k$  彩色が存在するような最小の  $k$

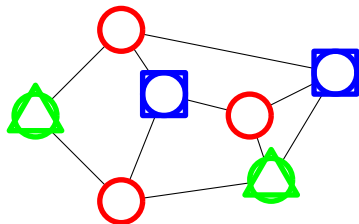


$$\chi(G) = 3$$

## 彩色の最適性

## 染色数とは？ (再掲)

無向グラフ  $G$  の**染色数**とは、 $G$  の  $k$  彩色が存在するような最小の  $k$



$$\chi(G) = 3 ???$$

## 疑問

- ▶ 3色未満で塗れないのか？
- ▶ 塗れないことをどう示すのか？

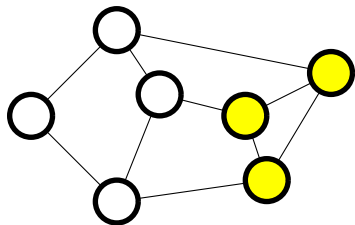
←  $\chi(G) \leq 3$  しか示していない

## クリーク

## グラフのクリークとは？

無向グラフ  $G$  の**クリーク**とは、頂点部分集合  $C$  で、  
その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を  $\omega(G)$  で表す ( $G$  の**クリーク数**と呼ぶ)

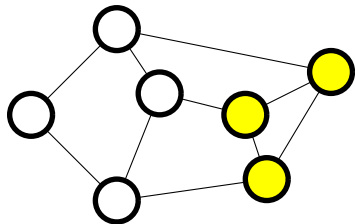


## クリーク

## グラフのクリークとは？

無向グラフ  $G$  の**クリーク**とは、頂点部分集合  $C$  で、  
 その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を  $\omega(G)$  で表す ( $G$  の**クリーク数**と呼ぶ)



## 観察 (弱双対性)

- ▶  $C$  が  $G$  のクリークである  
 $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

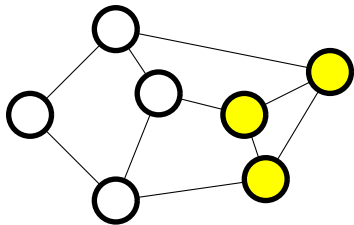
なぜか？

## クリーク

## グラフのクリークとは？

無向グラフ  $G$  の**クリーク**とは、頂点部分集合  $C$  で、その中のどの2頂点も辺で結ばれているもの

クリークの頂点数の最大値を  $\omega(G)$  で表す ( $G$  の**クリーク数**と呼ぶ)



## 観察 (弱双対性)

- ▶  $C$  が  $G$  のクリークである  
 $\Rightarrow \chi(G) \geq |C|$

なぜか？

直感： $C$  の部分だけで  $\chi(G)$  色は必要となる

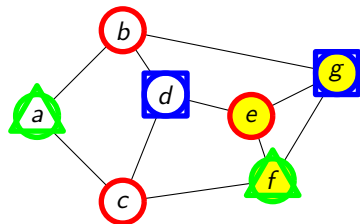
## 彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ  $G = (V, E)$

### 彩色とクリークの弱双対性

$G$  の任意のクリーク  $C$  に対して,  $\chi(G) \geq |C|$

証明の着想 : 数え上げ論法による



●	{b, c, e}	1		
■	{d, g}			1
▲	{a, f}		1	

	e	f	g
●	1		
■			1
▲		1	

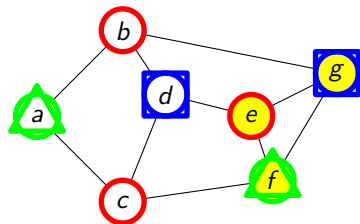
## 彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ  $G = (V, E)$

### 彩色とクリークの弱双対性

$G$  の任意のクリーク  $C$  に対して,  $\chi(G) \geq |C|$

証明の着想 : 数え上げ論法による



	$e$	$f$	$g$
● $\{b, c, e\}$	1		
■ $\{d, g\}$			1
▲ $\{a, f\}$		1	
	┌	┌	┌

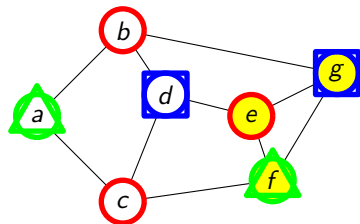
## 彩色とクリークの弱双対性

無向グラフ  $G = (V, E)$

### 彩色とクリークの弱双対性

$G$  の任意のクリーク  $C$  に対して,  $\chi(G) \geq |C|$

証明の着想 : 数え上げ論法による



	$e$	$f$	$g$	
● $\{b, c, e\}$	1			$\leq 1$
■ $\{d, g\}$			1	$\leq 1$
▲ $\{a, f\}$		1		$\leq 1$
	┌	┌	┌	



## 彩色とクリークの弱双対性

証明 :  $\chi(G)$  彩色を独立集合  $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$  への  $V$  の分割と捉える

- ▶ 各  $i \in \{1, \dots, \chi(G)\}$ ,  $v \in C$  に対して,

$$M_{i,v} = \begin{cases} 1 & (v \in I_i), \\ 0 & (v \notin I_i) \end{cases}$$

として行列  $M \in \mathbb{R}^{\{1, \dots, \chi(G)\} \times C}$  を考える

- ▶ 各独立集合  $I_i$  と  $C$  は頂点を 2 つ以上共有しないので,

$$\sum_{i=1}^{\chi(G)} \left( \sum_{v \in V} M_{i,v} \right) \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} 1 = \chi(G)$$

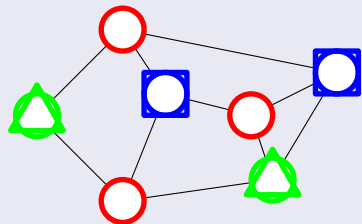
- ▶ 各  $v \in C$  は  $I_1, \dots, I_{\chi(G)}$  の中のちょうど 1 つの要素なので

$$\sum_{v \in V} \left( \sum_{i=1}^{\chi(G)} M_{i,v} \right) = \sum_{v \in V} 1 = |C|$$

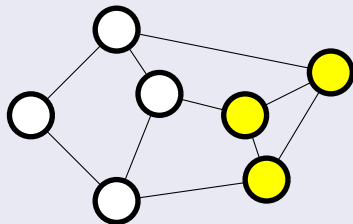
- ▶ したがって,  $\chi(G) \geq |C|$



## 彩色が最適であることの確認法

 $\chi(G)$  の上界

3色で塗れた  
 $\therefore \chi(G) \leq 3$

 $\chi(G)$  の下界

頂点数3のクリークを見つけた  
 $\therefore \chi(G) \geq 3$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 3$$

## 彩色が最適であることの確認法：まとめ

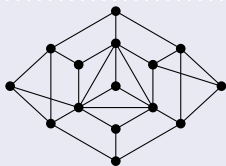
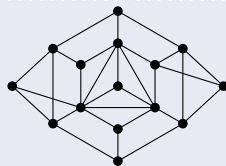
- ▶  $k$  色で塗る (つまり,  $\chi(G) \leq k$ )
- ▶ 頂点数  $k$  のクリークを見つける (つまり,  $\chi(G) \geq k$ )
- ▶ したがって,  $\chi(G) = k$

つまり,

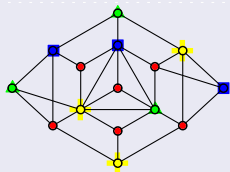
彩色問題では、色を塗ることだけではなくて、  
クリークを見つけることも重要になる

頂点数の大きなクリークがつけられるとうれしい

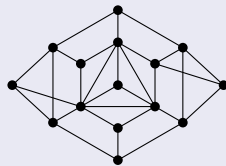
## 彩色の最適性の証明：例

 $\chi(G)$  の上界 $\chi(G)$  の下界

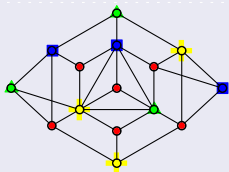
## 彩色の最適性の証明：例

 $\chi(G)$  の上界

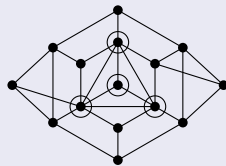
4色で塗れた  
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

 $\chi(G)$  の下界

## 彩色の最適性の証明：例

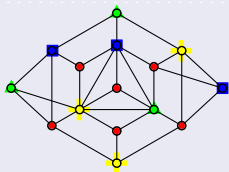
 $\chi(G)$  の上界

4色で塗れた  
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

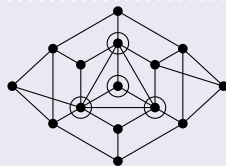
 $\chi(G)$  の下界

頂点数4のクリークを見つけた  
 $\therefore \chi(G) \geq 4$

## 彩色の最適性の証明：例

 $\chi(G)$  の上界

4色で塗れた  
 $\therefore \chi(G) \leq 4$

 $\chi(G)$  の下界

頂点数4のクリークを見つけた  
 $\therefore \chi(G) \geq 4$

上界と下界が一致した

$$\therefore \chi(G) = 4$$

## 染色数がうまく計算できそうな場合

任意の無向グラフ  $G$  に対して

- ▶ 任意のクリーク  $C$  に対して,  $\chi(G) \geq |C|$
- ▶ 特に,  $C$  を頂点数最大のクリークとすると,  $\chi(G) \geq \omega(G)$

## もし

- ▶  $k$  色で塗れれば,  $\chi(G) \leq k$
- ▶ 頂点数  $k$  のクリークが見つければ,  $\omega(G) \geq k$
- ▶  $\therefore \chi(G) \leq k \leq \omega(G) \leq \chi(G)$  となり,  $\chi(G) = k = \omega(G)$

## つまり

- ▶  $\chi(G) = \omega(G)$  が成り立つかどうかは重要そう

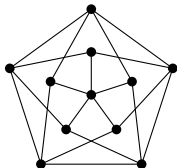


$\chi(G) > \omega(G)$  となる場合 (1)頂点数 5 の閉路  $C_5$ 

- ▶  $\chi(C_5) = 3$
- ▶  $\omega(C_5) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$  となる場合 (2)

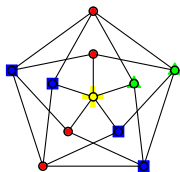
## Grötzsch グラフ



- ▶  $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- ▶  $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

$\chi(G) > \omega(G)$  となる場合 (2)

## Grötzsch グラフ



- ▶  $\chi(\text{Grötzsch}) = 4$
- ▶  $\omega(\text{Grötzsch}) = 2$

## 目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ

## 今日のまとめ

## 今日の目標

グラフの彩色に関する基礎概念を理解する

- ▶ 彩色と染色数
- ▶ 染色数とクリーク数の関係 (弱双対性)
- ▶ 貪欲彩色による上界

## 残った時間の使い方

- ▶ 演習問題をやる
  - ▶ 相談推奨 (ひとりでやらない)
- ▶ 質問をする
  - ▶ 教員とティーチング・アシスタントは巡回
- ▶ 退室時, 小さな紙に感想など書いて提出する ← 重要
  - ▶ 内容は何でも OK
  - ▶ 匿名で OK

## 目次

- ① グラフの彩色と染色数
- ② 辺彩色
- ③ 貪欲彩色
- ④ 染色数とクリーク数の弱双対性
- ⑤ 今日のまとめ